CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

Trikona Miti

॥ त्रिकोणमिति ॥

Irekona mite

486
old No: 4080

vasadeva

जो पण्डित बापूदेव जी ने संस्कृत में बनाई है

उसका उल्था

काशिक पाठशाला के

वेणीशङ्कर नामक एक विद्यार्थी ने

हिन्दी में किया

Hindi
Ganita Sastra
No: 7

M. H. Pub.
1859

॥ बनारस ॥

मेडिकल हाल् के छापे खाने में जे० जे० माइकल के इहतिमाम में छापी गई ॥

॥ सन १८५९ ईसवी ॥

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

6385

Price -/14/-.

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

प्रणिपत्य गणाधिपतिं श्रीबापूदेवनामकं स्वगुरुम् ॥
तद्रचितत्र्यस्रमितेरनुवादं देशभाषया कुर्वे ॥ १ ॥

॥ अथ त्रिकोणमितिः ॥

—oo—

॥ अध्यायः १ ॥

—oo—

॥ परिभाषाः ॥

प्रक्रम (१) त्रिकोण के तीन भुज और उतने ही कोण मिलके छ अवयव होते हैं उन सभों का बोध जिस ग्रन्थ से हो उसे त्रिकोणमिति कहते हैं उस में कोणों के गुणों का अच्छी भांति ज्ञान होने से कोणों का भुजों से जो सम्बन्ध है उसका और भुजों का भी अच्छी भांति बोध होता है इस लिये यहां मुख्यत्व करके कोणों के गुणों का वर्णन करते हैं ॥

(२) जो दो रेखा एक अन्त पर आपस में मिली हुई हैं उन की परस्पर झोंक को क्षेत्रमिति में कोण कहते हैं परन्तु त्रिकोणमिति में उन रेखाओं को परस्पर मिले हुए अन्त पर दृढ़ बांध पहिले एक रेखा को दूसरी पर धर उस धरी हुई रेखा को एक ही धरातल में

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

घुमाने से जो उन दो रेखाओं के बीच में अवकाश होता है सो कोण कहाता है ॥ पहिला क्षेत्र ॥

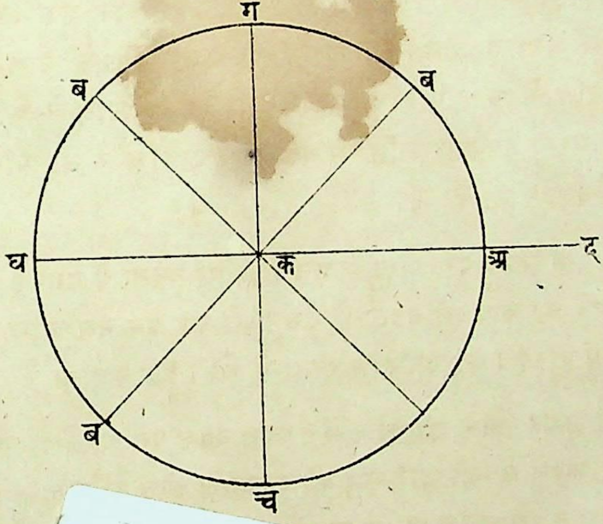
जैसा मानो कद आधार रेखा (क) दो रेखाओं का संयोग बिन्दु और कोण होने के लिये पहिले जो रेखा कद रेखा पर रखके क बिन्दु की चारों ओर घुमाई जाती है सो क ब होवे तब इस रेखा के घुमाने से जो अकब कोण उत्पन्न होता है वह त्रिकोणमितिसम्बन्धी कहाता है। क्षेत्रमितिसम्बन्धी कोण दो समकोण से अधिक नहीं होता परन्तु त्रिकोणमितिसम्बन्धी उस से भी अधिक और भी चाहे उतना बड़ा होता है। जो क केन्द्र की चारों ओर एक (क अ) व्यासार्द्ध से अगघच वृत्त किया जावे तो अकब कोण के सामने का चाप क्षेत्रमिति में अर्ध परिधि अर्थात् परिधि के आधे से अधिक नहीं होता परन्तु त्रिकोणमिति में वह चाप परिधि से भी अधिक चाहो उतना बड़ा होता है ॥

(३) क बिन्दु पर जैसा २ अकब कोण बढ़ता है वैसा २ उस कोण के सामने का चाप भी बढ़ता है इस लिये हर एक सम कोण के सामने का चाप परिधि का चतुर्थांश होता है यही पद कहाता है ॥

जैसा ऊपर लिखे हुए क्षेत्र में । अच व्यास पर क केन्द्र स्थान में ग घ लम्ब करने से जो चार सम कोण उत्पन्न होते हैं उन के सामने के क्रम से अ ग, ग घ, घ च, च अ ये चाप पद कहाते हैं इसी लिये एक पद में और एक सम कोण में समान ही नब्बे २ विभाग मान लेते हैं वे अंश कहलाते हैं वैसा ही दोनों में एक २ अंश के साठ २ तुल्य विभाग मानते हैं वे कला कहाती हैं और एक २ कला में साठ २ तुल्य विभाग मानते हैं उन को विकला कहते हैं । अब ये अंश कला और विकला संज्ञक जो विभाग हैं इन के मानों की संख्याओं को जताने के लिये उन २ संख्याओं के अङ्कों पर दहनी ओर क्रम से ° ′ ″ इन

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

पहिला क्षेत्र



891.263 K 98 K
9646

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

चिन्हों को लिखते हैं जैसा पचीस अंश चालीस कला और छप्पन विकला इन के जताने के लिये २५° ४०′ ५६″ यों लिखते हैं ॥

(४) जो किसी एक कोण करके उस के सामने का चाप मिले तो किसी और कोण करके उस के सामने का चाप मिलेगा यह अनुपात क्षेत्रमिति के छठवें अध्याय में ३३वीं प्रतिज्ञा है उस से यह अर्थ निकलता है कि

(१) कोण और उस के सामने जो चाप है इन दोनों की अंश आदि संख्या समान ही होती है । और

(२) निर्दिष्ट चाप की लम्बाई से उस चाप के सामने केन्द्र में लगे हुए कोण के अंश आदि की संख्या जान सकते हैं ॥

(५) (द्वितीय प्रक्रम में लिखे हुए क्षेत्र को देखो) क अ रेखा से ले क ब रेखा को घुमाने से उत्पन्न हुआ अकब कोण जब एक सम कोण से न्यून रहता है तब वह पहिले सम कोण का कोण कहाता है और उस के सामने का चाप पहिले पद का चाप कहाता है जब वह कोण एक सम कोण से अधिक हो और दो सम कोण से न्यून हो तब वह दूसरे सम कोण का पद कहाता है और उस के सामने का चाप दूसरे पद का चाप कहाता है । यों आगे भी जान लेना ॥

(६) कअ आधार रेखा से ले कब रेखा ज्यों २ सीधी घूमती है त्यों २ अकब कोण बढ़ता है इस लिये वह रेखा ज्यों २ विलोम अर्थात् उलटी घूमे त्यों २ अकब कोण घटेगा यह अत्यन्त स्पष्ट है इसी लिये अकच इस चौथे सम कोण के भीतर रहनेहारा अकब कोण ऋण होता है क्योंकि कब रेखा के उलटे घूमने से वह कोण बनता है ॥ इसी लिये उस कोण के सामने का अब चाप भी ऋण होता है ॥

(७) जिस किसी चाप वा कोण से पद वा सम कोण जितना अधिक

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

हो उतना उस चाप वा कोण की कोटि कहाती है जैसा (२ प्र० चे० देखो) अब चाप की वा अकब कोण की बग चाप वा बकग कोण कोटि है इस लिये चाप और कोण इन दोनों के हर एक अंश आदि मान को (९०°) नब्बे में घटा देने से जो शेष बचे सो उन दोनों की कोटि होती है। जैसा २३° १५′ ४५″ इस की कोटि ६६° ४४′ १५″ है ॥

अनुमान १ जो चाप वा कोण नब्बे से अधिक हो उस की कोटि ऋण होती है ॥

अनु० (२) जात्य त्र्यस्र में लघु कोणों का योग ९०° होता है इस लिये उन दोनों में एक दूसरे की कोटि होती है ॥

(८) किसी चाप वा कोण से परिधि का आधा वा दो सम कोण जितना अधिक हो उतना उस चाप वा कोण का स्पर्द्धी कहाता है जैसा २ (प्र०) चेत्र को देखो ॥

अब चाप वा अकब कोण का बघ चाप वा बकघ कोण स्पर्द्धी है इस लिये चाप और कोण के जो हर एक अंशादि मान हैं उन दोनों को १८०° में अलग २ घटा देने से जो शेष रहता है वह क्रम से स्पर्द्धिचाप और स्पर्द्धिकोण है ॥

जैसा ५५° ३५′ ४०″ इस का स्पर्द्धी = १२४° २४′ २०″ ॥

अनु० (१) जो चाप वा कोण १८०° से अधिक हो उस का स्पर्द्धी ऋण होता है ॥

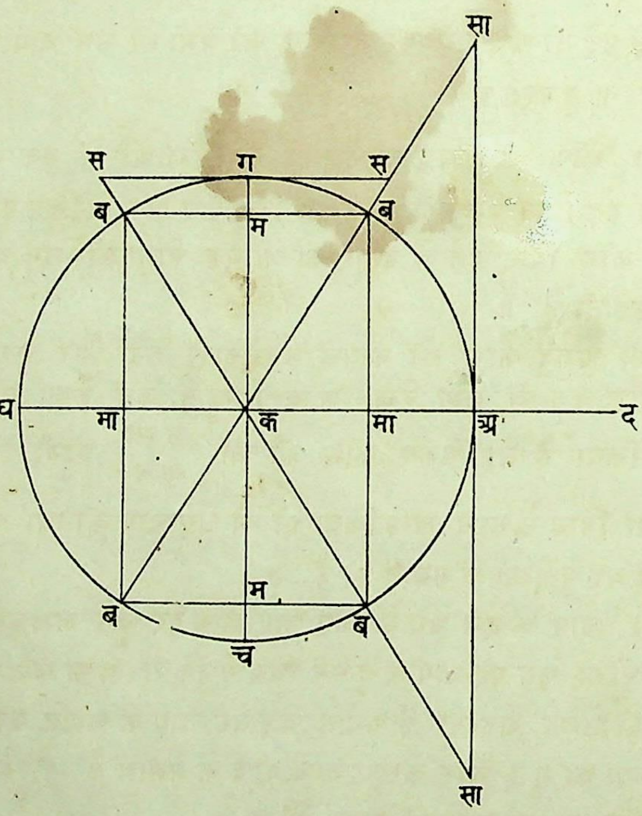
अनु० (२) हर एक त्रिभुज में तीन कोणों का योग दो सम कोण के समान होता है इस लिये त्रिभुज में किसी एक कोण का स्पर्द्धी और दो कोणों के योग के समान होता है ॥

(९) अब चाप और कोण के सम्बन्धी कितने एक पदार्थ कहते हैं। उन में चाप से सम्बन्ध रखनेहारे जो पदार्थ हैं वे चापीय कहाते

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

दूसरा क्षेत्र



CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

हैं । और कोण से जो सम्बन्ध रखते हैं वे कोणीय कहाते हैं । जैसा

(१) चाप के एक अन्त से व्यास करके दूसरे अन्त से उस व्यास पर जो लम्ब हो सो उस चाप की ज्या कहाती है । जैसा, मानो कि कद आधार रेखा है जिस का मूल क बिन्दु है उस बिन्दु को केन्द्र मानके अक इष्ट व्यासार्ध से अगघच वृत्त करके अच, गच, व्यास परस्पर लम्बरूप खींचना तब जो अब एक इष्ट चाप हो जिस का एक अग्र अ बिन्दु में और दूसरा चारो पदों में से किसी एक के अन्तर्गत अर्थात् मध्य में पड़े तो अघ व्यास पर लम्बरूप जो बमा सो उस चाप की ज्या होगी ॥ दूसरा क्षेत्र ॥

(२) कोण को उत्पन्न करनेहारी दो रेखाओं में एक रेखा के किसी इष्ट बिन्दु से दूसरी रेखा पर किए हुए लम्ब के लिए इष्ट बिन्दु और कोण बिन्दु इन के अन्तर का जो गुण होगा सो उस कोण की ज्या कहाती है ॥

जैसा अकब कोण को उत्पन्न करनेहारी कद और कसा रेखा हैं और इन में कसा रेखा के ब बिन्दु से कद रेखा पर बमा लम्ब किया है तो अकब कोण की ज्या $\frac{\text{बमा}}{\text{कब}}$ होगी । और जो सा बिन्द से साअ लम्ब किया हो तो उस चाप की ज्या $\frac{\text{साअ}}{\text{कसा}}$ होगी यह पूर्व ज्या के समान ही है ॥

(३) चाप के एक अग्र से किए हुए व्यास पर जो लम्बरूप दूसरा व्यास होगा उस पर चाप के दूसरे अग्र से किया हुआ लम्ब उस चाप की कोटिज्या कहाती है अर्थात् वह उस चाप के कोटि की ज्या है यह ज्या का मूल और केन्द्र इन के बीच के समान है । जैसा अब चाप की बस वा कमा कोटिज्या है ॥

(४) कोण को उत्पंन्न करनेहारी दो रेखाओं में एक रेखा के किसी इष्ट बिन्दु से दूसरी पर जहां लम्ब गिरे उस स्थान के और कोण

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

बिन्दु के अन्तर के लिये दृष्ट बिन्दु और कोण बिन्दु के अन्तर का जो गुण होगा सो उस कोण की कोटिज्या कहाती है ॥

जैसा अकब कोण की कोटिज्या $= \frac{\text{क मा}}{\text{क ब}} = \frac{\text{क अ}}{\text{क सा}}$ ॥

(५) चाप के एक अग्र को स्पर्श करके निकली हुई रेखा स्पर्श-स्थान से केन्द्र और चाप का दूसरा अग्र होके गई हुई रेखा तक जितनी हो सो उस चाप की स्पर्श रेखा कहाती है ॥

जैसा अब चाप की असा स्पर्शरेखा है ॥

(६) कोण को बनानेहारी दो रेखाओं में एक के किसी दृष्ट बिन्दु से दूसरी पर किए हुए लम्ब के लिये कोण बिन्दु और लम्बमूल इन के अन्तर का जो गुण होगा सो उस कोण की स्पर्शरेखा कहाती है।

जैसा अकब कोण की स्पर्शरेखा $= \frac{\text{ब मा}}{\text{क मा}} = \frac{\text{अ सा}}{\text{अ क}}$ ॥

(७) चाप के एक अग्र को पहिले पद का आदि मानके उस पद के अन्त में वृत्त को स्पर्श करके खींची हुई रेखा स्पर्श स्थान से केन्द्र और चाप का दूसरा अग्र होके गई हुई रेखा तक जितनी हो सो उस चाप की कोटिस्पर्शरेखा कहाती है । जैसा अब चाप की गस कोटिस्पर्शरेखा है ॥

(८) कोण की स्पर्शरेखा के अंश और हर को उलट देने से जो फल हो सो उस कोण की कोटिस्पर्शरेखा कहाती है ॥

जैसा ∵ अकब कोण की स्पर्शरेखा $= \frac{\text{ब मा}}{\text{क मा}} = \frac{\text{अ सा}}{\text{अ क}}$ ॥

∴ अकब कोण की कोटिस्पर्शरेखा $= \frac{\text{क मा}}{\text{ब मा}} = \frac{\text{अ क}}{\text{अ सा}}$ ॥

(९) चाप के एक अग्र को स्पर्श करके निकली हुई रेखा तक केन्द्र से लेके चाप का दूसरा अग्र होके गई हुई रेखा जितनी हो सो उस

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

चाप की छेदनरेखा कहाती है । जैसा अब चाप की कसा छेदनरेखा है ॥

(१०) कोण की कोटिज्या के अंश और हर को उलट देने से जो बनता है सो उस कोण की छेदनरेखा कहाती है ॥

जैसा ∵ अकबकोण की कोटिज्या $= \frac{\text{क सा}}{\text{क ब}} = \frac{\text{क अ}}{\text{क सा}}$

∴ छेदनरेखा $= \frac{\text{क ब}}{\text{क सा}} = \frac{\text{क सा}}{\text{क अ}}$ ॥

(११) चाप के एक अग्र को पहिले पद का आदि मानके उस पद के अन्त में वृत्त को स्पर्श करके खींची हुई रेखा तक केन्द्र से चाप का दूसरा अग्र होके गई हुई रेखा उस चाप की कोटिच्छेदनरेखा कहाती है । जैसा अब चाप की कस कोटिच्छेदनरेखा है ॥

(१२) कोण की ज्या के अंश और हर को उलट देने से जो बनता है सो उस कोण की कोटिच्छेदनरेखा कहाती है । जैसा ∵ अकब कोण की ज्या $= \frac{\text{ब सा}}{\text{क ब}} = \frac{\text{क सा}}{\text{क स}}$

∴ कोटिच्छेदनरेखा $= \frac{\text{क ब}}{\text{क सा}} = \frac{\text{क स}}{\text{अ स}}$

(१३) चाप का आदि और ज्या का मूल इन दोनों के बीच में जो व्यास का खण्ड है सो उस चाप की उत्क्रमज्या कहाती है । जैसा अब चाप की अ सा उत्क्रमज्या है ॥

(१४) कोण की कोटिज्या को एक में घटा देने से जो बनता है सो उस कोण की उत्क्रमज्या कहाती है ।

जैसा ∵ अकब कोण की कोटिज्या $= \frac{\text{क सा}}{\text{क ब}} = \frac{\text{क अ}}{\text{क सा}}$

∴ उत्क्रमज्या $= १ - \frac{\text{क सा}}{\text{क ब}} = १ - \frac{\text{क अ}}{\text{क सा}}$ ॥

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

(२५) चाप के एक अग्र को पहिले पद का आदि मानकर उस पद का अन्त और कोटी का मूल इन के वीच में जो व्यास का खण्ड हो सो उस चाप की कोत्क्रमज्या कहाती है । जैसा अब चाप की ग म कोत्क्रमज्या है ॥

(२६) कोण की ज्या को एक में घटाने से जो शेष वचे सो उस कोण की कोत्क्रमज्या है ।

जैसा ∵ अकब कोण की ज्या $= \frac{\text{ब सा}}{\text{क ब}} = \frac{\text{अ सा}}{\text{क सा}}$

$\therefore$ कोत्क्रमज्या $= १ - \frac{\text{ब सा}}{\text{क ब}} = १ - \frac{\text{अ सा}}{\text{क सा}}$

(२७) जो (अ) यह किसी चाप वा कोण का जनानेहारा हो तो इस की ज्या कोटिज्या आदि को क्रम से यों लिखते हैं जैसा ज्या अ । को ज्या अ । स्पअ । को स्पअ । छे अ । को छे अ । उअ । को उअ इसो लिये ज्या अ का वर्ग=(ज्या अ)^{२} । को ज्या अ इस का घन =(कोज्या अ)^{३} इत्यादि होंगे परन्तु यहां बहुत करके लाघव के लिये उन को ज्या^{२}अ । कोज्या^{३}अ इत्यादि ऐसा ही लिखते हैं यद्यपि किसी २ स्थान में ज्या^{२}अ इत्यादि का अर्थ दूसरा सोचा गया है ॥

(२८) चापीय वा कोणीय ज्या कोटि ज्या इत्यादि किसी २ पद में वा सम कोण में ऋण होती हैं जैसा (८वें प्रक्रम में लिखे हुए क्षेत्र को देखो) ॥

अब चाप की बसा ज्या प्रथम और दूसरे पद में धन होती है परन्तु तीसरे और चौथे पद में उस की दिशा बदलने से ऋण होती है इस प्रकार से अकब कोण की भी ज्या प्रथम और दूसरे सम कोण में धन होती है किन्तु तीसरे और चौथे में लम्ब की दिशा बदलने से ऋण होती है ॥

इस प्रकार से हर एक पद वा सम कोण में ज्या कोटि ज्या इत्यादियों

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

का धनत्व और ऋणत्व का निश्चय करके उस का अच्छी भांति ज्ञान होने के लिये यह एक चक्र लिखते हैं ॥

पदाङ्क वा समकोणाङ्क

चापीय वा कोणीय पदार्थ	१	२	३	४
ज्या	+	+	—	—
कोटिज्या	+	—	—	+
स्पर्शरेखा	+	—	+	—
कोटिस्पर्शरेखा	+	—	+	—
छेदनरेखा	+	—	—	+
कोटिच्छेदनरेखा	+	+	—	—
उत्क्रमज्या	+	+	+	+
कोट्युत्क्रमज्या	+	+	+	+

क्षेत्र में छेदनरेखा और कोटिच्छेदनरेखा इन की दिशाओं का बदलना भली भांति देखने में नहीं आता इस लिये उन के धनत्व और ऋणत्व को जानने के लिये दूसरा यत्न करते हैं सो ऐसा

$$\because \text{कभा} : \text{कब} :: \text{कअ} : \text{कसा} = \frac{\text{कब} \times \text{कअ}}{\text{कभा}} = \frac{\text{त्रि}\cdot\text{त्रि}}{\text{कोज्या}} = \frac{\text{त्रि}^2}{\text{कोज्या}}$$

$\therefore$ जो अब चाप का द्योतक (अ) हो

$$\text{तो छेअ} = \frac{\text{त्रि}^2}{\text{कोज्या अ}}$$ । और ऐसा ही

$$\because \text{कस} : \text{कब} :: \text{कग} : \text{कस} = \frac{\text{कब} \times \text{कग}}{\text{कस}} = \frac{\text{त्रि}\cdot\text{त्रि}}{\text{ज्या}} = \frac{\text{त्रि}^2}{\text{ज्या}}$$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$\therefore$ को छे अ = $\frac{\text{त्रि}^2}{\text{ज्या अ}}$ । ऐसा आगे भी जान लेना ॥

इस प्रकार से अकब कोण का द्योतक (अ) हो

तो छेअ = $\frac{\text{क ब}}{\text{क मा}} = \frac{१}{\frac{\text{क मा}}{\text{क ब}}} = \frac{१}{\text{को ज्या अ}}$

वैसा को छे अ = $\frac{\text{क ब}}{\text{ब मा}} = \frac{१}{\frac{\text{बमा}}{\text{क ब}}} = \frac{१}{\text{ज्या अ}}$

इस से स्पष्ट जान पड़ता है कि चाप वा कोण की छेदनरेखा और कोटिच्छेदनरेखा का धनत्व और ऋणत्व क्रम से कोटिज्या और ज्या के धनत्व और ऋणत्व के नांई होता है ॥

(१२) हर एक सम कोण के आदि में कोणीय ज्या आदिओं का मान वा हर एक पाद के आदि में चापीय ज्या आदिओं का मान नववें प्रक्रम के क्षेत्र को देखने से शीघ्र जान पड़ता है। तौ भी हम बालों के बोध के लिये यहां लिखके दिखलाते हैं ॥

कोणीय वा चापीय पदार्थ	अ वा ०°	ग वा ९०°	घ वा १९०°	च वा २७०°
ज्या	०	१	०	—१
कोटिज्या	१	०	— १	०
स्पर्शरेखा	०	∞	०	∞
कोटिस्पर्शरेखा	∞	०	∞	०
छेदनरेखा	१	∞	—	∞
कोटिच्छेदनरेखा	∞	१	∞	—१
उत्क्रमज्या	०	१	२	१
कोऽयुत्क्रमज्या	१	०	१	२

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

इस चक्र में कब त्रिज्या को एक मानके चापीय ज्या आदिओं का मान लिखा है ॥

(१३) अब नववें प्रक्रम में जो परिभाषा लिखी हैं उन का अच्छी भांति बोध होने के लिये कोणीय ज्या आदिओं के कितने एक परस्पर सम्बन्ध दिखलाते हैं (नववें प्रक्रम के क्षेत्र को देखो) कल्पना करो कि, अ = ∠ अकब ॥ तो

(१) $\text{ज्या अ} = \frac{\text{बमा}}{\text{कब}} = \frac{\text{बमा} \div \text{बमा}}{\text{कब} \div \text{बमा}} = \frac{१}{\text{कोछे अ}}$

(२) $\text{कोज्या अ} = \frac{\text{कमा}}{\text{कब}} = \frac{\text{कमा} \div \text{कमा}}{\text{कब} \div \text{कमा}} = \frac{१}{\text{छे अ}}$

(३) $\text{स्प अ} = \frac{\text{बमा}}{\text{कमा}} = \frac{\text{बमा} \div \text{कब}}{\text{कमा} \div \text{कब}} = \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}}$

(४) $\text{कोस्प अ} = \frac{\text{कमा}}{\text{बमा}} = \frac{\text{कमा} \div \text{कब}}{\text{बमा} \div \text{कब}} = \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}}$

$$= \frac{१}{\frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}}} = \frac{१}{\text{स्प अ}}$$

(५) $\text{छेअ} = \frac{\text{कब}}{\text{कमा}} = \frac{\text{कब} \div \text{कब}}{\text{कमा} \div \text{कब}} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}}$

(६) $\text{कोछे अ} = \frac{\text{कब}}{\text{बमा}} = \frac{\text{कब} \div \text{कब}}{\text{बमा} \div \text{कब}} = \frac{१}{\text{ज्याअ}}$

(७) $\text{उअ} = १ - \text{कोज्या अ} = १ - \frac{१}{\text{छेअ}}$

(८) $\text{कोउअ} = १ - \text{ज्याअ} = १ - \frac{१}{\text{कोछे अ}}$

(९) $\text{ज्याअ}^{२} + \text{कोज्याअ}^{२} = \left(\frac{\text{बमा}}{\text{कब}}\right)^{२} + \left(\frac{\text{कमा}}{\text{कब}}\right)^{२}$

$$= \frac{\text{बमा}^{२} + \text{कमा}^{२}}{\text{कब}^{२}} = \frac{\text{कब}^{२}}{\text{कब}^{२}} = १$$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$\therefore$ ज्या^{२}अ = १ — कोज्या^{२}अ । और, कोज्या^{२}अ = १ - ज्या^{२}अ,

(१४) अब कोणीय ज्या आदिओं का चापीय ज्या आदिओं से जो सम्बन्ध है सो दिखलाते हैं । जो (अ) कोण के सामने का चाप (आ) हो तो (नववें प्रक्रम में लिखे ज्ञए चेत्र को देखना)

$$\frac{\text{ज्याआ}}{\text{त्रि}} = \frac{\text{बस}}{\text{कब}} = \text{ज्याअ}$$

$\therefore$ ज्याआ = त्रि. ज्याअ । अब जो, त्रि = १

तो, ज्याआ = ज्याअ ऐसा ही औरो में भी जानना ।

इस से यह जाना जाता है कि कोणीय ज्या आदि एक त्रिज्या में चापीय होते हैं अनन्तर जो इष्ट त्रिज्या से गुण दें तो वे इष्ट व्यासार्ध में चापीय होते हैं ऐसा ही गुण विपर्यय करके चापीयों से कोणीय होते हैं ॥

(१५) अनु० किसी त्रिकोणमिति सम्बन्धी राशि वा समीकरण में जो कोणीय ज्या आदि हों उन को चापीय करने की इच्छा हो तो उन में इष्ट व्यासार्ध के तुल्य (त्रि) हर लगाने से वे चापीय होते हैं ॥

जैसा ज्या^{२}अ + कोज्या^{२}अ = १ इस में ज्या और कोटिज्या के स्थान में $\frac{\text{ज्या अ}}{\text{त्रि}}$ और $\frac{\text{कोज्या अ}}{\text{त्रि}}$ इन दोनों का उत्थापन करने से

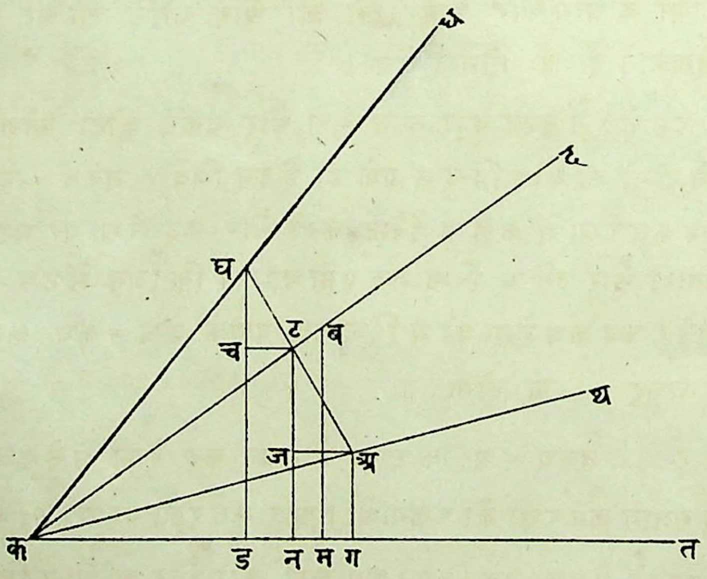
$\left(\frac{\text{ज्याअ}}{\text{त्रि}}\right)^{२} + \left(\frac{\text{कोज्या अ}}{\text{त्रि}}\right)^{२}$ = १ यों सिद्ध होता है ॥

$\therefore$ ज्या^{२}अ + कोज्या^{२}अ = त्रि^{२} इस समीकरण में ज्या और कोटिज्या चापीय सिद्ध ज्ञई ॥

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

तीसरा क्षेत्र



CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

॥ अध्याय २ ॥

इस अध्याय में कोणों के योग और अन्तर की ज्या आदिओं का साधन और उन का योग और अन्तर गुणनफल और भजनफल के मान और आधे अंशों की ज्या और उन की कोटिज्या का आनयन ज्या आदि के मानों की विचित्रता और निर्द्दिष्ट अंशों की ज्या और कोटिज्या का आनयन और कोणीय ज्या आदिओं की सारणी बनाने का प्रकार ये सब विषय दिखलाये हैं ॥

(१६) अब दो कोणों की ज्या और कोटि ज्या पर से उन दो कोणों के योग और अन्तर की ज्या और कोटि ज्या का साधन दिखलाते हैं ॥ तीसरा क्षेत्र ।

इस क्षेत्र में तकद बड़ा कोण = अ और दकध छोटा कोण = क इन दोनों का कोण बिन्दु क एक ही है इस लिये ∠ तकध = अ + क अब कध रेखा में कहीं घ बिन्दु करो और कद रेखा पर घट लम्ब उतारो और उसे अ बिन्दु तक ऐसा बढ़ाओ कि जिस में टअ = घट होवे। अब कअ रेखा को थ बिन्दु तक बढ़ाके कअ = कघ, करो तो ∠ थकद = ∠ क होगा ॥

∴ ∠ तकथ = अ—क होता है। अब कद रेखा में से कघ रेखा के समान कब रेखा को अलगाओ। और कत रेखा पर घ। ट। ब। अ। बिन्दुओं से घड। टन। बम। अग लम्ब करो और अ और ट बिन्दुओं से टन। और घड रेखा पर अज और टच लम्ब करो तब घचट और टजअ ये दो त्रिभुज सब अंशों में समान होंगे ∴ घच = टज वैसा ही चट = जअ और कटन। कबम त्रिभुज ये सब परस्पर सजातीय हैं ॥

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

और ज्याअ $= \frac{बम}{कव}$ । ज्याक $= \frac{घट}{कघ} = \frac{घट}{कब}$

कोज्याअ $= \frac{कम}{कव}$ । कोज्याक $= \frac{कट}{कघ} = \frac{कट}{कब}$

वैसा ही ज्या (अ + क) $= \frac{घड}{कघ} = \frac{घड}{कब}$

ज्या (अ — क) $= \frac{अग}{कअ} = \frac{अग}{कब}$

कोज्या (अ + क) $= \frac{कड}{कघ} = \frac{कड}{कब}$

कोज्या (अ — क) $= \frac{क ग}{क अ} = \frac{क ग}{क ब}$

आगे घ ड = च ड + घ च = ड न + घ च

अ ग = ट न — ट ज = ट न — घ च

क ड = क न — ड न = क न — च ट

क ग = क न + न ग = क न + अ ज = क न + च ट

अब सजातीय त्रिभुजों से $\frac{ट न}{क ट} = \frac{ब म}{क ब} = \frac{च ट}{घ ट}$

ट न $= \frac{ब म . क ट}{क व}$ वैसाही च ट $= \frac{ब म . घ ट}{क ब}$

$\frac{घ च}{घ ट} = \frac{क म}{क व} = \frac{क न}{क ट}$ ∴ घ च $= \frac{क म . घ ट}{कव}$ वैसा कन $=$ $\frac{क म . क ट}{क व}$

∴ घ ड $= \frac{ब म . क ट}{क ब} + \frac{क म . घ ट}{क ब}$ । वा $\frac{घ ड}{क ब} = \frac{ब म}{क ब} . \frac{क ट}{क ब}$ $+ \frac{क म}{क ब} . \frac{घ ट}{क ब}$

अग $= \frac{ब म . क ट}{क ब} — \frac{क म . घ ट}{क ब}$ । वा $\frac{अ ग}{क व} = \frac{व म}{क ब} . \frac{क ट}{क ब}$ — $\frac{कम}{कब} . \frac{घट}{कब}$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$$कड = \frac{कम \cdot कट}{कब} - \frac{बम \cdot घड}{कब}$$ । वा $$\frac{कड}{कब} = \frac{कम}{कब} \cdot \frac{कट}{कब} - \frac{बम}{कब} \cdot \frac{घट}{कब}$$ और

$$कग = \frac{कम \cdot कट}{कब} + \frac{बम \cdot घट}{कब}$$ । वा $$\frac{कग}{कब} = \frac{कम}{कब} \cdot \frac{कट}{कब} + \frac{बम}{कब} \cdot \frac{घट}{कब}$$

∴ ज्या (अ + क) = ज्या अ . कोज्या क + कोज्या अ . ज्या क (१)

ज्या (अ — क) = ज्या अ . कोज्या क — कोज्या अ . ज्या क (२)

कोज्या (अ + क) = कोज्या अ . कोज्या क — ज्या अ . ज्या क (३)

कोज्या (अ—क) = कोज्याअ . कोज्या क + ज्या अ . ज्या क (४)

यह प्रकार (क) कोण को (अ) कोण से छोटा मानके और (अ+क) कोण को सम कोण से छोटा मानके दिखलाया परन्तु (अ) कोण से (क) कोण बड़ा हो और (अ + क) कोण सम कोण से बड़ा हो तो भी उक्त प्रकार से दो कोण के योग और अन्तर कोज्या और कोटिज्या जो पहिले सिद्ध किई हैं वेही होती हैं ॥

(१७) अनु० १६वें प्रक्रम में दूसरे और चौथे समीकरण में जो (अ) कोण शून्य मानो तो उत्थापन से अर्थात् अ के स्थान में शून्य धरने से

ज्या (—क)= — ज्याक

और कोज्या (—क) = कोज्याक

इन दो समीकरणों से जान पड़ता है कि ऋण कोण की ज्या ऋण होती है और उसकी कोटिज्या धन होती है ॥

इसी लिये स्प (— क) = $\frac{ज्या\ (—क)}{को\ ज्या\ (—क)} = \frac{—\ ज्या\ क}{को\ ज्या\ क}$ = —स्पक

ऐसा ही कोस्प (—क) = — कोस्प क । छे (—क) = छे क

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

को छे (—क) = — को छेक। उ (—क) = उ क। को उ (—क) = २ — कोउग्र ॥

(१८) अनु० (१६वें) प्रक्रम के तीसरे और चौथे समीकरण में जो अ = १८०° हो ॥ तो

ज्या (१८०° — क) = ज्या १८०° × को ज्या क — को ज्या १८०° × ज्या क,

(१२वें प्रक्रम ० चेत्र को देखो), = ० × को ज्या क + १ × ज्या क

= ज्या क

और कोज्या (१८०° — क) = कोज्या १८०° × कोज्या क + ज्या १८०° × ज्या क = —१ × काज्या क १८०° × ज्या० × ज्या क

= — को ज्या क

इस प्रकार से यह जाना जाता है कि किसी कोण की और उस करके रहित दो सम कोण की ज्या समान ही होती है और यों ही कोण करके रहित दो सम कोण की कोटिज्या और उस कोण की कोटिज्या तुल्य ही होती है परन्तु उन दोनों में केवल धनत्व और ऋणत्व का मात्र भेद रहता है ॥

इसी लिये स्प (१८०° — क) = $\frac{\text{ज्या (१८०° - क)}}{\text{को ज्या (१८०° — क)}}$ = $\frac{\text{ज्या क}}{\text{— को ज्या क}}$

= — स्प क

ऐसा ही कोस्प (१८०° — क) = — कोस्प क। छे (१८०° — क) = — छेक। को छे (१८०° — क) = को छे क। उ (१८०° — क) = २ — उ क। को उ (१८०° — क) = को उ क ॥

ऐसा ही ∵ ज्या (अ + क) = ज्या अ . कोज्या क + कोज्या अ . ज्या क और, कोज्या (अ + क) = कोज्या अ. कोज्या क — ज्या अ. ज्याक

∴ जो अ = ९०° हो तो ज्या (९०° + क) = कोज्या क और कोज्या (९०° + क) = — ज्या क ॥

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

और जो, अ = १८०° हो तो ज्या (१८०° + क) = ज्याक और कोज्या (१८०° + क) = — कोज्या क ॥

(१९) सोलहवें प्रक्रम में जो (१), (२), (३), (४) समीकरण हैं इन को यदि इष्ट त्रिज्या में चापीय करना हो तो (प्र० १५) की रीति से ॥

$$\frac{\text{ज्या (अ + क)}}{\text{त्रि}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{कोज्याक}}{\text{त्रि}} + \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{ज्याक}}{\text{त्रि}}$$

$$\text{वा ज्या (अ + क)} = \frac{\text{ज्याअ. कोज्याक}}{\text{त्रि}} + \frac{\text{कोज्याअ. ज्याक}}{\text{त्रि}},$$

$$\text{ऐसा ही ज्या (अ — क)} = \frac{\text{ज्याअ. कोज्याक}}{\text{त्रि}} - \frac{\text{कोज्याअ . ज्याक}}{\text{त्रि}}$$

इसी लिये श्रीभास्कराचार्य जी ने सिद्धान्तशिरोमणि में कहा है कि

चापयोरिष्टयोर्दोर्ज्ये मिथःकोटिज्यकाहते ।
त्रिज्याभक्ते तयोरैक्यं तच्चापैक्यस्यदोर्ज्यका ।
चापान्तरस्य जीवा स्यात् तयोरन्तरसम्मिता ॥

$$\text{और } \frac{\text{कोज्या (अ + क)}}{\text{त्रि}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{कोज्याक}}{\text{त्रि}} - \frac{\text{ज्याअ}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{ज्याक}}{\text{त्रि}}$$

$$\text{वा कोज्या (अ + क)} = \frac{\text{कोज्याअ . कोज्याक}}{\text{त्रि}} - \frac{\text{ज्याअ . ज्याक}}{\text{त्रि}}$$

$$\text{ऐसा ही कोज्या (अ—क)} = \frac{\text{कोज्याअ . कोज्याक}}{\text{त्रि}} + \frac{\text{ज्याअ . ज्याक}}{\text{त्रि}}$$

इसी लिये कमलाकरने स्वरचित सिद्धान्ततत्त्वविवेक में स्पष्टाधिकार में ज्योत्पत्ति में कहा है ॥ कि

दोर्ज्ययोः कोटिमौर्व्यौघ्नघातौ त्रिज्योद्धृतौ तयोः ।
वियोगयोगौजीवेस्तश्चापैक्यान्तरकोटिजे ॥

(२०) अब जिस लिये

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$$\text{ज्या}\,(\text{अ} + \text{क}) = \text{ज्या अ. कोज्या क} + \text{कोज्या अ. ज्या क} \qquad (१)$$

$$\text{ज्या}\,(\text{अ} — \text{क}) = \text{ज्या अ. कोज्या क} — \text{कोज्या अ. ज्या क} \qquad (२)$$

$$\text{कोज्या}\,(\text{अ} + \text{क}) = \text{कोज्या अ. कोज्या क} — \text{ज्या अ. ज्या क} \qquad (३)$$

$$\text{कोज्या}\,(\text{अ} — \text{क}) = \text{कोज्या अ. कोज्या क} + \text{ज्या अ. ज्या क} \qquad (४)$$

इस लिये (१), (२) इन दोनों के और (३), (४) इन दोनों के योग और अन्तर से ॥

$$\text{ज्या}\,(\text{अ} + \text{क}) + \text{ज्या}\,(\text{अ} — \text{क}) = \text{२ ज्या अ. कोज्या क}$$

$$\text{ज्या}\,(\text{अ} + \text{क}) — \text{ज्या}\,(\text{अ} — \text{क}) = \text{२ कोज्या अ. ज्या क}$$

$$\text{कोज्या}\,(\text{अ} + \text{क}) + \text{कोज्या}\,(\text{अ} — \text{क}) = \text{२ कोज्या अ. कोज्या क}$$

$$\text{कोज्या}\,(\text{अ} — \text{क}) — \text{कोज्या}\,(\text{अ} + \text{क}) = \text{२ ज्या अ. ज्या क}$$

अब (१) (२) इन दोनों का गुणन करने से

$$\text{ज्या}\,(\text{अ} + \text{क}).\,\text{ज्या}\,(\text{अ} — \text{क}) = \text{ज्या}^{२}\text{अ}.\,\text{कोज्या}^{२}\text{क} — \text{कोज्या}^{२}\text{अ}.\,\text{ज्या}^{२}\text{क}$$

$$= \text{ज्या}^{२}\text{अ}\,(१ — \text{ज्या}^{२}\text{क}) — (१ — \text{ज्या}^{२}\text{अ})\,\text{ज्या}^{२}\text{क}$$

$$= \text{ज्या}^{२}\text{अ} — \text{ज्या}^{२}\text{अ}.\,\text{ज्या}^{२}\text{क} — \text{ज्या}^{२}\text{क} + \text{ज्या}^{२}\text{अ}.\,\text{ज्या}^{२}\text{क}$$

$$\text{ज्या}^{२}\text{अ} — \text{ज्या}^{२}\text{क} = (\text{ज्या अ} + \text{ज्या क})\,(\text{ज्या अ} — \text{ज्या क})$$

$$\text{वा} \quad = १ — \text{ज्या}^{२}\text{अ} — (१ — \text{कोज्या}^{२}\text{क})$$

$$= \text{कोज्या}^{२}\text{क} - \text{कोज्या}^{२}\text{अ} = (\text{कोज्या अ} + \text{कोज्या क})\,(\text{कोज्या क} - \text{कोज्या अ})$$

ऐसा ही (३) (४) इन दोनों के गुणन फल से

$$\text{कोज्या}\,(\text{अ}. + \text{क}).\,\text{कोज्या}\,(\text{अ} — \text{क})$$

$$= \text{कोज्या}^{२}\text{अ}.\,\text{कोज्या}^{२}\text{क} — \text{ज्या}^{२}\text{अ}.\,\text{ज्या}^{२}\text{क}$$

$$= (१ — \text{ज्या}^{२}\text{अ})\,\text{कोज्या}^{२}\text{क} — \text{ज्या}^{२}\text{अ}\,(१ — \text{कोज्या}^{२}\text{क})$$

$$= \text{कोज्या}^{२}\text{क} — \text{ज्या}^{२}\text{अ}.\,\text{कोज्या}^{२}\text{क} — \text{ज्या}^{२}\text{अ} + \text{ज्या}^{२}\text{अ}.\,\text{कोज्या}^{२}\text{क}$$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$$= \text{कोज्या}^{२}\text{क} - \text{ज्या}^{२}\text{अ} = (\text{कोज्याक} + \text{ज्याअ})(\text{कोज्याक} - \text{ज्याअ})$$

$$= १ - \text{ज्या}^{२}\text{क} - १ + \text{कोज्या}^{२}\text{अ} = \text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{क},$$

$$= (\text{कोज्याअ} + \text{ज्याक}) . (\text{कोज्याअ} - \text{ज्याक})$$

अब (१) इस में (२) इस करके भाग लेने से

$$\frac{\text{ज्या}(\text{अ}+\text{क})}{\text{ज्या}(\text{अ}-\text{क})} = \frac{\text{ज्याअ} . \text{कोज्याक} + \text{कोज्याअ} . \text{ज्याक}}{\text{ज्याअ} . \text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ} . \text{ज्याक}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{ज्याअ} . \text{कोज्याक}}{\text{कोज्याअ} . \text{कोज्याक}} + \dfrac{\text{कोज्याअ} . \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} . \text{कोज्याक}}}{\dfrac{\text{ज्याअ} . \text{कोज्याक}}{\text{कोज्या} . \text{कोज्याक}} - \dfrac{\text{कोज्याअ} . \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} . \text{कोज्याक}}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} + \dfrac{\text{ज्याक}}{\text{कोज्याक}}}{\dfrac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} - \dfrac{\text{ज्याक}}{\text{कोज्याक}}}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} + \text{स्पक}}{\text{स्पअ} - \text{स्पक}}$$

$$\text{वा} = \frac{\text{कोस्पक} + \text{कोस्पअ}}{\text{कोस्पक} - \text{कोस्पअ}}$$

$$\text{वा} = \frac{१ + \text{स्पकोअ} . \text{स्पक}}{१ - \text{कोस्पअ} . \text{स्पक}}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} . \text{कोस्पक} + १}{\text{स्पअ} . \text{कोस्पक} - १}$$

$$\text{ऐसा ही } \frac{\text{कोज्या}(\text{अ}+\text{क})}{\text{कोज्या}(\text{अ}-\text{क})} = \frac{\text{कोज्याअ} . \text{कोज्याक} - \text{ज्याअ} . \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} . \text{कोज्याक} + \text{ज्याअ} . \text{ज्याक}}$$

$$= \frac{\text{कोस्पअ} - \text{स्पक}}{\text{कोस्पअ} + \text{स्पक}}$$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$$\text{वा} = \frac{\text{कोस्पक} - \text{स्पअ}}{\text{कोस्पक} + \text{स्पअ}} \text{ वा} = \frac{\text{कोस्पअ. कोस्पक} - १}{\text{कोस्पअ. कोस्पक} + १}$$ ।

अब (१) इस में (३) इस करके भाग लेने से

$$\frac{\text{ज्या}(\text{अ}+\text{क})}{\text{कोज्या}(\text{अ}+\text{क})} = \text{स्प}(\text{अ}+\text{क}) = \frac{\text{ज्याअ. कोज्याक} + \text{कोज्याअ. ज्याक}}{\text{कोज्याअ. कोज्याक} - \text{ज्याअ. ज्याक}}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} + \text{स्पक}}{१ - \text{स्पअ. स्पक}} \text{ वा} = \frac{\text{कोस्पक} + \text{कोस्पअ}}{\text{कोस्पअ. कोस्पक} - १}$$

$$\text{वा} = \frac{१ + \text{कोस्पअ. स्पक}}{\text{कोस्पअ} - \text{स्पक}} \text{ वा} = \frac{\text{स्पअ. कोस्पक} + १}{\text{कोस्पक} - \text{स्पअ}}$$

इसी प्रकार से

$$\text{स्प}(\text{अ} - \text{क}) = \frac{\text{ज्याअ. कोज्याक} - \text{कोज्याअ. ज्याक}}{\text{कोज्याअ. कोज्याक} + \text{ज्याअ. ज्याक}}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} - \text{स्पक}}{१ + \text{स्पअ. स्पक}}$$

इत्यादि अनेक रूप भेद होते हैं

(२१) कल्पना करो कि $\text{अ} = \text{प} + \text{फ}$ और $\text{क} = \text{प} - \text{फ}$

$$\text{तब प} = \frac{१}{२}(\text{अ} + \text{क}) \text{ और फ} = \frac{१}{२}(\text{अ} - \text{क})$$

$$\therefore \text{ज्या अ} = \text{ज्या}(\text{प} + \text{फ}) = \text{ज्याप . कोज्याफ} + \text{कोज्याप . ज्याफ}$$

$$= \text{ज्या}\frac{१}{२}(\text{अ} + \text{क}).\text{ कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}-\text{क}) +$$

$$\text{कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}+\text{क}).\text{ ज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}-\text{क}). \quad (\text{आ})$$

$$\text{ऐसा ही ज्याक} = \text{ज्या}\frac{१}{२}(\text{अ} + \text{क}).\text{ कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ} - \text{क})$$

$$- \text{कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ} + \text{क}).\text{ ज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}-\text{क}) \quad (\text{का})$$

$$\text{कोज्याअ} = \text{कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ} + \text{क}).\text{कोज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}-\text{क})$$

$$-\text{ज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}+\text{क}).\text{ ज्या}\frac{१}{२}(\text{अ}-\text{क}). \quad (\text{गा})$$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

कोज्या क = कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ + क). कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ—क) +

ज्या $\frac{१}{२}$ (अ + क). ज्या $\frac{१}{२}$ (अ—क) (घा)

२२ (आ) (का) इन दोनों के और (गा) (घा) इन दोनों के योग और अन्तर करने से ये समीकरण बनते हैं ।

ज्याअ + ज्याक = २ ज्या $\frac{१}{२}$ (अ+क) कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ—क) . . (पा)

ज्याअ — ज्याक = २ कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ+क). ज्या $\frac{१}{२}$ (अ—क). . (फा)

कोज्याअ+कोज्याक = २ कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ+क). कोज्या $\frac{१}{२}$ (अ-क) (बा)

कोज्याक — कोज्याअ = २ ज्या $\frac{१}{२}$ (अ+क). ज्या $\frac{१}{२}$ (अ—क) (भा)

(१) (पा) इस में (फा) इस से भाग लेने से नीचे लिखा हुआ सिद्ध होता है ॥

$$\frac{\text{ज्या अ + ज्या क}}{\text{ज्या अ—ज्या क}} = \frac{\text{२ ज्या } \frac{१}{२} \text{(अ + क). कोज्या } \frac{१}{२} \text{(अ—क)}}{\text{२ कोज्या } \frac{१}{२} \text{(अ + क). ज्या } \frac{१}{२} \text{(अ—क)}}$$

$$= \frac{\text{ज्या } \frac{१}{२} \text{(अ + क)}}{\text{कोज्या } \frac{१}{२} \text{(अ+क)}} \times \frac{\text{कोज्या } \frac{१}{२} \text{(अ — क)}}{\text{ज्या } \frac{१}{२} \text{(अ — क)}}$$

$$= \text{स्प } \frac{१}{२} \text{(अ + क)} \times \text{कोस्प } \frac{१}{२} \text{(अ—क)}$$

$$= \text{स्प } \frac{१}{२} \text{(अ + क)} \times \frac{१}{\text{स्प } \frac{१}{२} \text{(अ-क)}}$$

$$= \frac{\text{स्प } \frac{१}{२} \text{(अ + क)}}{\text{स्प } \frac{१}{२} \text{(अ—क)}},$$

(२) (बा) इस में (भा) इस से भाग लेने से

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$$\frac{\text{कोज्याक} + \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ}} = \text{कोस्प}\,\frac{1}{2}(\text{अ}+\text{क}).\,\text{कोस्प}\,\frac{1}{2}(\text{अ}-\text{क})$$

(३). $\text{पा} \div \text{बा} = \frac{\text{ज्याअ} + \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} + \text{कोज्याक}}$

$$= \frac{2\,\text{ज्या}\,\frac{1}{2}(\text{अ}+\text{क}).\,\text{कोज्या}\,\frac{1}{2}(\text{अ}-\text{क})}{2\,\text{कोज्या}\,\frac{1}{2}(\text{अ}+\text{क}).\text{कोज्या}\,\frac{1}{2}(\text{अ}-\text{क})} = \frac{\text{ज्या}\,\frac{1}{2}(\text{अ}+\text{क})}{\text{कोज्या}\,\frac{1}{2}(\text{अ}+\text{क})}$$

$$= \text{स्प}\,\frac{1}{2}(\text{अ}+\text{क})$$

(४) $\text{फा} \div \text{भा} = \frac{\text{ज्याअ} - \text{ज्याक}}{\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ}}$

$$= \frac{2\,\text{कोज्या}\,\frac{1}{2}(\text{अ}+\text{क}).\,\text{ज्या}\,\frac{1}{2}(\text{अ}-\text{क})}{2\,\text{ज्या}\,\frac{1}{2}(\text{अ}+\text{क}).\,\,\text{ज्या}\,\frac{1}{2}(\text{अ}-\text{क})}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}\,\frac{1}{2}(\text{अ}+\text{क})}{\text{ज्या}\,\frac{1}{2}(\text{अ}+\text{क})} = \text{कोस्प}\,\frac{1}{2}(\text{अ}+\text{क})$$

(५) $\text{बा} \div \text{भा} = \frac{\text{ज्याअ} + \text{ज्याक}}{\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ}} = \text{कोस्प}\,\frac{1}{2}\,(\text{अ}-\text{क})$

(६) $\text{पा} \div \text{बा} = \frac{\text{ज्याअ} - \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} + \text{कोज्याक}} = \text{स्प}\,\frac{1}{2}\,(\text{अ}-\text{क})$

२३ जिस लिये ज्या (न + १) अ = ज्या (अ न + अ)

= ज्याअन. कोज्याअ + कोज्याअ न. ज्याअ

कोज्या (न + १) अ = कोज्या (अ न + अ)

= कोज्या अ न. कोज्याअ — ज्याअन. ज्याअ

∴ जो न = १, २, इत्यादि हो

तो (१) ज्या २ अ = २ ज्याअ. कोज्याअ

(२) $\text{कोज्या}\,2\,\text{अ} = \text{कोज्या}^2\text{अ} - \text{ज्या}^2\text{अ}$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

= १—२ ज्या^{२}अ = २ कोज्या^{२}अ—१

(३) ज्या ३ अ = ज्या २ अ. कोज्या अ + कोज्या २ अ. ज्या अ

= २ ज्या अ. कोज्या^{२}अ + कोज्या^{२}अ. ज्या अ—ज्या^{३}अ

= ३ ज्या अ. कोज्या^{२}अ — ज्या^{३}अ

= ३ ज्या अ—४ज्या^{३}अ

(४) कोज्या ३ अ = कोज्या २ अ. कोज्या अ — ज्या २ अ. ज्या अ

= (२ कोज्या^{२}अ — १) कोज्या अ — २ ज्या^{२}अ. कोज्या अ

= २ कोज्या^{३}अ—कोज्या अ—२ कोज्या अ + २ कोज्या^{३}अ

= ४ कोज्या^{३}अ — ३ कोज्या अ

इत्यादि अनेक रूपभेद होते हैं ॥

(२४) २३वें प्रक्रम में (२) इस से नीचे लिखे हुए दो समीकरण उत्पन्न होते हैं ॥ जैसा

२ ज्या^{२}अ = १—कोज्या २ अ . . . . (पा)

२ कोज्या^{२}अ = १ + कोज्या २ अ (फा)

(२५) अब आधे अंशों की ज्या और कोटिज्या के आनयन के लिये प्रकारान्तर दिखलाते हैं ॥

जिस लिये १ = कोज्या^{२}अ + ज्या^{२}अ (१)

और ज्या २अ = २ ज्या अ. कोज्या अ (२)

∴ १+ज्या २ अ = कोज्या^{२}अ + २ ज्या अ. कोज्या अ + ज्या^{२}अ

= (कोज्या अ + ज्या अ)^{२}

अन्तर करने से

१ — ज्या २ अ = कोज्या^{२}अ — २ ज्या अ. कोज्या अ + ज्या^{२}अ

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$$\frac{\text{कोज्याक} + \text{कोज्याअ}}{\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ}} = \text{कोस्प}\ \frac{१}{२}\ (\text{अ} + \text{क}).\ \text{कोस्प}\ \frac{१}{२}\ (\text{अ} - \text{क})$$

(३). $\text{पा} \div \text{बा} = \dfrac{\text{ज्याअ} + \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} + \text{कोज्याक}}$

$$= \frac{२\ \text{ज्या}\ \frac{१}{२}\ (\text{अ} + \text{क}).\ \text{कोज्या}\ \frac{१}{२}\ (\text{अ} - \text{क})}{२\ \text{कोज्या}\ \frac{१}{२}\ (\text{अ} + \text{क}).\ \text{कोज्या}\ \frac{१}{२}\ (\text{अ} - \text{क})} = \frac{\text{ज्या}\ \frac{१}{२}\ (\text{अ} + \text{क})}{\text{कोज्या}\ \frac{१}{२}\ (\text{अ} + \text{क})}$$

$$= \text{स्प}\ \frac{१}{२}\ (\text{अ} + \text{क})$$

(४) $\text{फा} \div \text{भा} = \dfrac{\text{ज्याअ} - \text{ज्याक}}{\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ}}$

$$= \frac{२\ \text{कोज्या}\ \frac{१}{२}\ (\text{अ} + \text{क}).\ \text{ज्या}\ \frac{१}{२}\ (\text{अ} - \text{क})}{२\ \text{ज्या}\ \frac{१}{२}\ (\text{अ} + \text{क}).\ \text{ज्या}\ \frac{१}{२}\ (\text{अ} - \text{क})}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}\ \frac{१}{२}\ (\text{अ} + \text{क})}{\text{ज्या}\ \frac{१}{२}\ (\text{अ} + \text{क})} = \text{कोस्प}\ \frac{१}{२}\ (\text{अ} + \text{क})$$

(५) $\text{बा} \div \text{भा} = \dfrac{\text{ज्याअ} + \text{ज्याक}}{\text{कोज्याक} - \text{कोज्याअ}} = \text{कोस्प}\ \dfrac{१}{२}\ (\text{अ} - \text{क})$

(६) $\text{पा} \div \text{बा} = \dfrac{\text{ज्याअ} - \text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ} + \text{कोज्याक}} = \text{स्प}\ \dfrac{१}{२}\ (\text{अ} - \text{क})$

२३ जिस लिये ज्या (न + १) अ = ज्या (अ न + अ)

= ज्याअन. कोज्याअ + कोज्याअ न. ज्याअ

कोज्या (न + १) अ = कोज्या (अ न + अ)

= कोज्या अ न. कोज्याअ — ज्याअन. ज्याअ

∴ जो न = १, २, इत्यादि हो

तो (१) ज्या २ अ = २ ज्याअ. कोज्याअ

(२) कोज्या २ अ = $\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{२}\text{अ}$

6385

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$= १ - २\,\text{ज्या}^{२}\text{अ} = २\,\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - १$

(३) $\text{ज्या}\,३\,\text{अ} = \text{ज्या}\,२\,\text{अ}.\,\text{कोज्याअ} + \text{कोज्या}\,२\,\text{अ}.\,\text{ज्याअ}$

$= २\,\text{ज्याअ}.\,\text{कोज्या}^{२}\text{अ} + \text{कोज्या}^{२}\text{अ}.\,\text{ज्याअ} - \text{ज्या}^{३}\text{अ}$

$= ३\,\text{ज्याअ}.\,\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - \text{ज्या}^{३}\text{अ}$

$= ३\,\text{ज्याअ} - ४\,\text{ज्या}^{३}\text{अ}$

(४) $\text{कोज्या}\,३\,\text{अ} = \text{कोज्या}\,२\,\text{अ}.\,\text{कोज्याअ} - \text{ज्या}\,२\,\text{अ}.\,\text{ज्याअ}$

$= (२\,\text{कोज्या}^{२}\text{अ} - १)\,\text{कोज्याअ} - २\,\text{ज्या}^{२}\text{अ}.\,\text{कोज्याअ}$

$= २\,\text{कोज्या}^{३}\text{अ} - \text{कोज्या अ} - २\,\text{कोज्याअ} + २\,\text{कोज्या}^{३}\text{अ}$

$= ४\,\text{कोज्या}^{३}\text{अ} - ३\,\text{कोज्याअ}$

इत्यादि अनेक रूपभेद होते हैं ॥

(२४) २३वें प्रक्रम में (२) इस से नीचे लिखे हुए दो समीकरण उत्पन्न होते हैं ॥ जैसा

$२\,\text{ज्या}^{२}\text{अ} = १ - \text{कोज्या}\,२\,\text{अ}$ . . . . (पा)

$२\,\text{कोज्या}^{२}\text{अ} = १ + \text{कोज्या}\,२\,\text{अ}$ (फा)

(२५) अब आधे अंशों की ज्या और कोटिज्या के आनयन के लिये प्रकारान्तर दिखलाते हैं ॥

जिस लिये $१ = \text{कोज्या}^{२}\text{अ} + \text{ज्या}^{२}\text{अ}$ (१)

और $\text{ज्या}\,२\text{अ} = २\,\text{ज्याअ}.\,\text{कोज्याअ}$ (२)

$\therefore\ १ + \text{ज्या}\,२\,\text{अ} = \text{कोज्या}^{२}\text{अ} + २\,\text{ज्याअ}.\,\text{कोज्याअ} + \text{ज्या}^{२}\text{अ}$

$= (\text{कोज्याअ} + \text{ज्याअ})^{२}$

अन्तर करने से

$१ - \text{ज्या}\,२\,\text{अ} = \text{कोज्या}^{२}\text{अ} - २\,\text{ज्याअ}.\,\text{कोज्याअ} + \text{ज्या}^{२}\text{अ}$

CC-0. In Public Domain. Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$= (\text{कोज्याअ} - \text{ज्याअ})^2$

$\therefore$ $\text{कोज्याअ} + \text{ज्याअ} = \pm \sqrt{\text{१} - \text{ज्या २ अ}}$

$\text{कोज्याअ} - \text{ज्याअ} = \pm \sqrt{\text{१} - \text{ज्या २ अ}}$

(१) यहां जो २ अ < ९०° अर्थात् अ < ४५° तो वह उक्त समीकरण इस प्रकार का होता है ।

$$\left.\begin{array}{l}\text{कोज्याअ} + \text{ज्याअ} = \sqrt{\text{१} + \text{ज्या २ अ}} \\ \text{कोज्याअ} - \text{ज्याअ} = \sqrt{\text{१} - \text{ज्या २ अ}}\end{array}\right\} \quad (\text{पा})$$

(२) जो २ अ > ९०° < १८०° अर्थात् अ > ४५° < ९०°

$$\text{तो} \quad \left.\begin{array}{l}\text{कोज्याअ} + \text{ज्याअ} = \sqrt{\text{१} + \text{ज्या २ अ}} \\ \text{कोज्याअ} - \text{ज्याअ} = -\sqrt{\text{१} - \text{ज्या २ अ}}\end{array}\right\} \quad (\text{फा})$$

(३) जो २ अ > १८०° < २७०° अर्थात् अ > ९०° < १३५°

$$\text{तो} \quad \left.\begin{array}{l}\text{कोज्याअ} + \text{ज्याअ} = +\sqrt{\text{१} - \text{ज्या २ अ}} \\ \text{कोज्याअ} - \text{ज्याअ} = -\sqrt{\text{१} + \text{ज्या २ अ}}\end{array}\right\} \quad (\text{बा})$$

(४) और जो २ अ > २७०° < ३६०° अर्थात् अ > १३५° < १८०°

$$\text{तो} \quad \left.\begin{array}{l}\text{कोज्याअ} + \text{ज्याअ} = -\sqrt{\text{१} - \text{ज्या २ अ}} \\ \text{कोज्याअ} - \text{ज्याअ} = -\sqrt{\text{१} + \text{ज्या २ अ}}\end{array}\right\} \quad \text{भा}$$

(५) पा, फा इन दोनों का योग और अन्तर करने से

$$\text{कोज्याअ} = \frac{\text{१}}{\text{२}}\left(\sqrt{\text{१} + \text{ज्या २ अ}} \pm \sqrt{\text{१} - \text{ज्या २ अ}}\right)$$

$$\text{ज्याअ} = \frac{\text{१}}{\text{२}}\left(\sqrt{\text{१} + \text{ज्या २ अ}} \pm \sqrt{\text{१} - \text{ज्या २ अ}}\right)$$

यहां ९०° अंश से छोटा कोण जब ४५° अंश से छोटा वा बड़ा हो तब क्रमसे हर एक समीकरण के दूसरे पक्ष के दूसरे पद का चिन्ह धन वा ऋण होगा ॥

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

२६ शिष्यों की वुद्धि बढ़ने के लिये इस प्रक्रम में ज्या आदि के अनेक प्रकार के मान दिखलाए हैं ये सब पहिले प्रक्रमों से थोड़े प्रयास से उत्पन्न होते हैं ॥

(१) $\text{ज्या अ} = \sqrt{\text{१} - \text{कोज्या}^{\text{२}}\text{अ}} = \text{कोज्या अ. स्प अ} = \dfrac{\text{स्प अ}}{\text{छे अ}}$

$= \dfrac{\text{कोज्या अ}}{\text{कोस्प अ}} = \dfrac{\text{१}}{\sqrt{\text{१} + \text{कोस्प}^{\text{२}}\text{अ}}} = \dfrac{\text{स्प अ}}{\sqrt{\text{१} + \text{कोस्प}^{\text{२}}\text{अ}}} = \dfrac{\text{१}}{\text{कोछे अ}}$

$= \dfrac{\text{छे अ. कोज्या अ}}{\text{कोछे अ}} = \dfrac{\text{स्प अ. कोस्प अ}}{\text{छे अ}} = \dfrac{\sqrt{\text{छे}^{\text{२}}\text{अ} - \text{१}}}{\text{छे अ}}$

(२) $\text{कोज्या अ} = \dfrac{\text{ज्या अ}}{\text{स्प अ}} = \dfrac{\text{१}}{\sqrt{\text{१} + \text{स्प}^{\text{२}}\text{अ}}} = \dfrac{\text{१}}{\text{छे अ}}$

$= \dfrac{\text{स्प अ. कोस्प अ}}{\text{छे अ}} = \dfrac{\text{ज्या अ कोछे अ}}{\text{छे अ}} = \text{ज्या अ. कोस्प अ}$

$= \dfrac{\text{कोस्प अ}}{\text{कोछे अ}} = \dfrac{\text{कोस्प अ}}{\sqrt{\text{१} + \text{कोस्प}^{\text{२}}\text{अ}}} = \dfrac{\sqrt{\text{कोछे}^{\text{२}}\text{अ} - \text{१}}}{\text{कोछे अ}}$

(३) $\text{स्प अ} = \dfrac{\text{ज्या अ}}{\sqrt{\text{१} - \text{ज्या}^{\text{२}}\text{अ}}} = \dfrac{\sqrt{\text{१} - \text{कोज्या}^{\text{२}}\text{अ}}}{\text{कोज्या अ}} = \dfrac{\text{२}}{\text{कोस्प अ}}$

$= \dfrac{\text{१}}{\sqrt{\text{कोछे}^{\text{२}}\text{अ} - \text{१}}} = \dfrac{\text{कोज्या अ. छे अ}}{\text{कोस्प अ}} = \sqrt{\text{छे}^{\text{२}}\text{अ} - \text{१}}$

$= \dfrac{\text{ज्या अ. कोछे अ}}{\text{कोस्प अ}} = \dfrac{\text{छे अ}}{\text{कोछे अ}} = \dfrac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ. कोस्प}^{\text{२}}\text{अ}}$

$= \dfrac{\sqrt{\text{२ उ अ} - \text{उ}^{\text{२}}\text{अ}}}{\text{१} - \text{उ अ}}$

(४) $\text{कोस्प अ} = \dfrac{\text{१}}{\text{स्प अ}} = \sqrt{\text{कोछे}^{\text{२}}\text{अ} - \text{१}}$

$= \dfrac{\text{ज्या अ. कोछे अ}}{\text{स्प अ}} = \dfrac{\text{कोज्या अ. छे अ}}{\text{स्प अ}}$

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$$= \frac{\text{कोछे अ}}{\text{छे अ}} = \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} = \frac{\sqrt{१ - \text{ज्या}^{२}\text{अ}}}{\text{ज्या अ}} = \frac{\text{कोज्या अ}}{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^{२}\text{अ}}}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{\text{छे}^{२}\text{अ} - १}} = \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ. स्प}^{२}\text{अ}} = \frac{१ - \text{उ अ}}{\sqrt{२\text{उ अ} - \text{उ}^{२}\text{अ}}}$$

(५) $\text{छे अ} = \sqrt{१ + \text{स्प}^{२}\text{अ}} = \frac{१}{\text{कोज्या अ}} = \frac{\text{स्प अ}}{\text{ज्या अ}}$

$$= \frac{१}{\text{ज्या अ. कोस्प अ}} = \frac{\text{कोछे अ}}{\text{कोस्प अ}} = \frac{\text{स्प अ. कोस्प अ}}{\text{कोज्या अ}}$$

$$= \frac{\text{ज्या अ. कोछे अ}}{\text{कोज्या अ}} = \frac{१}{\sqrt{१ - \text{ज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^{२}\text{अ}}}{\text{कोस्प अ}}$$

$$= \frac{\text{कोछे अ}}{\sqrt{\text{कोछे}^{२}\text{अ} - १}} = \text{स्प अ. कोछे अ} = \frac{१}{१ - \text{उ अ}}$$

(६) $\text{कोछे अ} = \sqrt{१ - \text{कोस्प}^{२}\text{अ}} = \frac{१}{\text{ज्या अ}} = \frac{\text{छे अ}}{\text{स्प अ}}$

$$= \frac{\text{कोस्प अ}}{\text{कोज्या अ}} = \frac{१}{\text{कोज्या अ. स्प अ}} = \frac{\text{स्प अ. कोस्प अ}}{\text{ज्या अ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या अ. छे अ}}{\text{ज्या अ}} = \frac{१}{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^{२}\text{अ}}} = \frac{\sqrt{१ + \text{स्प}^{२}\text{अ}}}{\text{स्प अ}}$$

$$= \frac{\text{छे अ}}{\sqrt{\text{छे}^{२}\text{अ} - १}} = \text{कोस्प अ. छे अ} = \frac{१}{\sqrt{२\text{उ अ} - \text{उ}^{२}\text{अ}}}$$

(७) $\text{उ अ} = १ - \text{कोज्या अ} = १ - \sqrt{१ - \text{ज्या}^{२}\text{अ}}$

$$= १ - \frac{१}{\sqrt{१ + \text{स्प}^{२}\text{अ}}} = १ - \frac{\text{कोस्प अ}}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^{२}\text{अ}}}$$

$$= १ - \frac{१}{\text{छे अ}} = १ - \frac{\sqrt{\text{कोछे}^{२}\text{अ} - १}}{\text{कोछे अ}}$$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

२७ इस प्रक्रम में कोण के ज्यादि को से उसी द्विगुण कोण के ज्यादि मानों को दिखलाते हैं ॥

(१) $ज्या\, २\, अ = ज्याअ \cdot कोज्याअ = \frac{२\, ज्या^{२} अ}{स्पअ} = \frac{२\, कोज्या^{२} अ}{कोस्पअ}$

$= \frac{२\, ज्याअ}{छेअ} = \frac{२\, कोज्याअ}{कोछेअ} = \frac{२\, स्पअ}{१ + स्प^{२} अ} = \frac{२\, स्पअ}{छेअ}$

$= \frac{२}{स्पअ + कोस्पअ} = \frac{२\, कोस्पअ}{१ + कोस्प^{२} अ} = \frac{२\, कोस्पअ}{कोछे^{२} अ}$

(२) $कोज्या\, २\, अ = कोज्या^{२} अ - ज्या^{२} अ = १ - २\, ज्या^{२} अ$

$= २\, कोज्या^{२} अ - १ = \frac{१ - स्प^{२} अ}{१ + स्प^{२} अ} = \frac{कोस्पअ - स्पअ}{कोस्पअ + स्पअ}$

$= \frac{कोस्प^{२} अ - १}{कोस्प^{२} अ + १} = \frac{२ - छे^{२} अ}{छे^{२} अ} = \frac{२\, कोज्याअ - छेअ}{छेअ}$

$= \frac{कोछे^{२} अ - २}{कोछे^{२} अ} = \frac{कोछेअ - २\, ज्याअ}{कोछे^{२} अ}$

(३) $स्प\, २\, अ = \frac{२\, स्पअ}{१ - स्प^{२} अ} = \frac{२}{कोस्पअ - स्पअ} = \frac{२ ज्याअ \cdot कोज्याअ}{१ - २\, ज्या^{२} अ}$

$= \frac{२\, ज्याअ \cdot कोज्याअ}{२\, कोज्या^{२} अ - १} = \frac{२\, कोस्पअ}{कोस्प^{२} अ - १} = \frac{२\, स्पअ}{२ - छे^{२} अ} = \frac{२\, कोस्पअ}{कोछे^{२} अ - १}$

(४) $कोस्प\, २\, अ = \frac{१ - स्प^{२} अ}{२\, स्पअ} = \frac{कोस्प^{२} अ - १}{२\, कोस्पअ} = \frac{कोस्पअ - स्पअ}{२}$

$= \frac{१ - २\, ज्या^{२} अ}{२\, ज्याअ \cdot कोज्याअ} = \frac{२\, कोज्या^{२} अ - १}{२\, ज्याअ \cdot कोज्याअ} = \frac{२ - छे^{२} अ}{२\, स्पअ}$

$= \frac{कोछे^{२} अ - २}{२\, कोस्पअ}$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

(५) $छे २ अ = \frac{छे^2 अ}{२ - छे^2 अ} = \frac{छेअ}{२ कोज्याअ - छेअ} = \frac{१}{२ कोज्या^2 अ - १}$

$= \frac{१}{१ - २ज्या^2 अ} = \frac{१ + स्प^2 अ}{१ - स्प^2 अ} = \frac{कोस्पअ + स्पअ}{कोस्पअ - स्पअ} = \frac{कोस्प^2 अ + १}{कोस्प^2 अ - १}$

$= \frac{कोछे^2 अ}{कोछे^2 अ - २}$

(६) $कोछे २ अ = \frac{१}{२} छेअ. कोछेअ = \frac{छेअ}{२ ज्याअ} = \frac{कोछेअ}{२ कोज्याअ}$

$= \frac{१}{२ ज्याअ. कोज्याअ} = \frac{१ + स्प^2 अ}{२ स्पअ} = \frac{छे^2 अ}{२ स्पअ} = \frac{स्पअ + कोस्पअ}{२}$

$= \frac{१ + कोस्प^2 अ}{२ कोस्पअ} = \frac{कोछे^2 अ}{२ कोस्प^2 अ}$

(७) $उ २ अ = २ ज्या^2 अ = २ - २ कोज्या^2 अ = \frac{२ स्प^2 अ}{१ + स्प^2 अ}$

$= \frac{२ स्प^2 अ}{छे^2 अ} = \frac{२ स्पअ}{स्पअ + कोस्पअ} = \frac{२}{१ + कोस्प^2 अ} = \frac{२}{कोछे^2 अ}$

$= \frac{२ ज्याअ}{कोछेअ} = २ \frac{छे^2 अ - १}{छे^2 अ} = \frac{छेअ - कोज्याअ}{छेअ}$

२८ इस प्रक्रम में निर्दिष्ट अंशों की ज्या औ कोटिज्या का आनयन दिखलाते हैं ॥

(१) ४५° की ज्या औ कोटिज्या का आनयन करते हैं

∵ (२३) वे प्रक्रम के (२) इस समीकरण से $२ ज्या^2 अ = १ - कोज्या २ अ$

और, $२ कोज्या^2 अ = १ + कोज्या २ अ$ यों सिद्ध हुआ है

∴ जो $अ = ४५°$

तब $२ ज्या^2 ४५° = १ - कोज्या ९०° = १ = २ कोज्या^2 अ$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$\therefore$ ज्या ४५° $= \pm \frac{१}{\sqrt{२}}$ = कोज्या ४५°

यहां ऋणमान अनुपपन्न अर्थात् अप्रसिद्ध है इस लिये उसे तज देना

३०° की और ६०° की ज्या और कोटिज्या का आनयन

यहां ज्या २ अ = कोज्या अ

और ज्या २ अ = २ ज्या अ . कोज्या अ

$\therefore$ २ ज्या अ . कोज्या अ = कोज्या अ

$\therefore$ ज्या अ $= \frac{१}{२}$, वा ज्या ३०° $= \frac{१}{२}$ = कोज्या ६०°

और कोज्या ३०° $= \sqrt{१ - \text{ज्या}^२ ३०°} = \sqrt{१ - \frac{१}{४}} = \frac{\sqrt{३}}{२}$

= ज्या ६०°

(३) १८° की और ७२° की ज्या और कोटिज्या का आनयन

जो अ = १८° तो ज्या २ अ = कोज्या ३ अ

अब ज्या २ अ = २ ज्या अ. कोज्या अ। कोज्या ३ अ = कोज्या अ —
४ ज्या^{२} अ. कोज्या अ,

$\therefore$ २ ज्या अ. कोज्या अ = कोज्या अ — ४ ज्या^{२} अ कोज्या अ

वा २ ज्या अ = १ — ४ ज्या^{२} अ $\therefore$ ४ ज्या^{२} अ + २ ज्या अ = १

$\therefore$ वर्गसमीकरण की विधि करके सिद्ध हुआ

$$\text{ज्या अ} = \frac{\pm \sqrt{५} - १}{४}$$

इसमें ऋणमान तज देना

$\therefore$ ज्या १८° $= \frac{\sqrt{५} - १}{४}$ = कोज्या ७२°

इसी लिये कोज्या १८° $= \sqrt{१ - \text{ज्या}^२ १८°} = \sqrt{१ - \left(\frac{\sqrt{५} - १}{४}\right)^२}$

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosh

$$= \sqrt{१ - \frac{६ - २\sqrt{५}}{१६}} = \sqrt{\frac{१० + २\sqrt{५}}{१६}} = \frac{\sqrt{१० + २\sqrt{५}}}{४}$$

= ज्या ७२°

(४) ३६° अंश की और ५४° की ज्या औ कोटिज्या का आनयन।

जो अ = १८° तो ज्या २ अ = २ ज्याअ. कोज्याअ

$$\therefore ज्या\ ३६° = २\left(\frac{\sqrt{५} - १}{४}\right)\left(\frac{\sqrt{१० + २\sqrt{५}}}{४}\right) = \frac{\sqrt{१० - २\sqrt{५}}}{४}$$

= कोज्याअ

$$इसी\ लिये\ कोज्या\ ३६° = \sqrt{१ - ज्या^{२}\ ३६°} = \sqrt{१ - \frac{१० - २\sqrt{५}}{१६}}$$

$$= \sqrt{\frac{६ + २\sqrt{५}}{१६}} = \frac{\sqrt{५} + १}{४} = ज्या\ ५४°$$

(५) ३०° अंश की और १८° की अर्द्धांशज्या औ कोटिज्या का आनयन करते हैं ॥

यहां (२५)वें प्रक्रम के दो समीकरणों का उपयोग पड़ता है

$$ज्याअ = \frac{१}{२}\left\{\sqrt{१ + ज्या\ २\ अ} - \sqrt{१ - ज्या\ २\ अ}\right\}$$

$$कोज्याअ = \frac{१}{२}\left\{\sqrt{१ + ज्या\ २\ अ} + \sqrt{१ - ज्या\ २\ अ}\right\}$$

इस में यदि २ अ = ३०° इसी लिये ज्या २ अ = $\frac{१}{२}$

$$तब\ ज्या\ १५° = \frac{१}{२}\left\{\sqrt{१ + \frac{१}{२}} - \sqrt{१ - \frac{१}{२}}\right\} =$$

$$\frac{१}{२}\left(\sqrt{\frac{३}{२}} - \sqrt{\frac{१}{२}}\right) = \frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}} = कोज्या\ ७५°$$

$$कोज्या\ १५° = \frac{१}{२}\left\{\sqrt{१ + \frac{१}{२}} + \sqrt{१ - \frac{१}{२}}\right\}$$

$$= \frac{१}{२}\left\{\sqrt{\frac{३}{२}} + \sqrt{\frac{१}{२}}\right\} = \frac{\sqrt{३} + १}{२\sqrt{२}} = ज्या\ ७५°$$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

ऐसा ही ज्या ९° = $\frac{\sqrt{५}+१}{४\sqrt{२}} - \frac{\sqrt{५-\sqrt{५}}}{४}$ = कोज्या ८१°

कोज्या ९° = $\frac{\sqrt{५}+१}{\sqrt{२}} + \frac{\sqrt{५-\sqrt{५}}}{४}$ = ज्या ८१°

(६) ३° अंशों की ज्या औ कोटिज्या का आनयन

१८° अंशों की औ १५° अंशों की ज्या औ कोटिज्या को ज्ञात करके उन पर से ३° अंशों की ज्या औ कोटिज्या का साधन करते हैं ॥

ज्या ३° = ज्या (१८° — १५°) = ज्या १८° कोज्या १५° — कोज्या १८° × ज्या १५°

कोज्या ३° = कोज्या (१८° — १५°) = कोज्या १८° कोज्या १५° × ज्या १८° ज्या १५°

इन दो समीकरणों से सुख से उक्त अंशों की ज्या औ कोटिज्या जान पड़ती हैं ।

(७) यों तीन छ नव आदि लेके नब्बे अंश तक प्रत्येक खण्ड की ज्या औ कोटिज्या को सिद्ध करके बालबोध के लिये लिखके दिखलाते हैं

ज्या ३° = $\frac{\sqrt{३}+१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१) - \frac{\sqrt{३}-१}{८}\sqrt{५+\sqrt{५}}$

= कोज्या ८७°

ज्या ६° = $-\frac{१}{८}(\sqrt{५}+१) + \frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}}$

= कोज्या ८४°

ज्या ९° = $\frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) - \frac{१}{४}\sqrt{५-\sqrt{५}}$

कोज्या ८१°

ज्या १२° = $-\frac{\sqrt{३}}{८}(\sqrt{५}-१) + \frac{१}{४\sqrt{२}}\sqrt{५+\sqrt{५}}$

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosh

$$= \text{कोज्या } ७८^\circ$$

$$\text{ज्या } १५^\circ = \frac{१}{२\sqrt{२}}(\sqrt{३} - १) = \text{कोज्या } ७५^\circ$$

$$\text{ज्या } १८^\circ = \frac{१}{४}(\sqrt{५} - १) = \text{कोज्या } ७२^\circ$$

$$\text{ज्या } २१^\circ = -\frac{\sqrt{३} - १}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५} + १) + \frac{\sqrt{३} + १}{८} \times \sqrt{५ - \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ६१^\circ$$

$$\text{ज्या } २४^\circ = \frac{\sqrt{३}}{८}(\sqrt{५} + १) - \frac{१}{४\sqrt{२}}\sqrt{५ - \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ६६^\circ$$

$$\text{ज्या } २७^\circ = -\frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५} - १) + \frac{१}{४} \times \sqrt{५ + \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ६३^\circ$$

$$\text{ज्या } ३०^\circ = \frac{१}{२} = \text{कोज्या } ६०^\circ$$

$$\text{ज्या } ३३^\circ = \frac{\sqrt{३} + १}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५} - १) + \frac{\sqrt{३}\ १}{८} \times \sqrt{५ + \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ५७^\circ$$

$$\text{ज्या } ३६^\circ = \frac{१}{२\sqrt{२}}\sqrt{५ - \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ५४^\circ$$

$$\text{ज्या } ३९^\circ = \frac{\sqrt{३} + १}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५} + १) - \frac{\sqrt{३} - १}{८}\sqrt{५ - \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ५१^\circ$$

$$\text{ज्या } ४२^\circ = -\frac{१}{८}(\sqrt{५} - १) + \frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}}\sqrt{५ + \sqrt{५}} = \text{कोज्या } ४८^\circ$$

$$\text{ज्या } ४५^\circ = \frac{१}{\sqrt{२}} = \text{कोज्या } ४५^\circ$$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$$\text{ज्या } ४८^\circ = \frac{\sqrt{३}}{८}(\sqrt{५}-१) + \frac{१}{४\sqrt{२}}\sqrt{५+\sqrt{५}}$$

$$= \text{कोज्या } ४२$$

$$\text{ज्या } ५१^\circ = \frac{\sqrt{३}-१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) + \frac{\sqrt{३}+१}{८}\sqrt{५-\sqrt{५}}$$

$$= \text{कोज्या } ३९^\circ$$

$$\text{ज्या } ५४^\circ = \frac{१}{४}(\sqrt{५}+१) \qquad = \text{कोज्या } ३६^\circ$$

$$\text{ज्या } ५७^\circ = -\frac{\sqrt{३}-१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१) + \frac{\sqrt{३}+१}{८}\sqrt{५+\sqrt{५}}$$

$$= \text{कोज्या } ३३^\circ$$

$$\text{ज्या } ६०^\circ = \frac{\sqrt{३}}{२} \qquad = \text{कोज्या } ३०^\circ$$

$$\text{ज्या } ६३^\circ = \frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१) + \frac{१}{४}\sqrt{५+\sqrt{५}}$$

$$= \text{कोज्या } २७^\circ$$

$$\text{ज्या } ६६^\circ = \frac{१}{८}(\sqrt{५}+१) + \frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}}$$

$$= \text{कोज्या } २४^\circ$$

$$\text{ज्या } ६९^\circ = \frac{\sqrt{३}+१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) + \frac{\sqrt{३}-१}{८}\sqrt{५-\sqrt{५}}$$

$$= \text{कोज्या } २१^\circ$$

$$\text{ज्या } ७२^\circ = \frac{१}{२\sqrt{२}}\left(\sqrt{५+\sqrt{५}}\right) \qquad = \text{कोज्या } १८^\circ$$

$$\text{ज्या } ७५^\circ = \frac{१}{२\sqrt{२}}(\sqrt{३}+१) \qquad = \text{कोज्या } १५^\circ$$

$$\text{ज्या } ७८^\circ = \frac{१}{८}(\sqrt{५}-१) + \frac{\sqrt{३}}{४\sqrt{२}}\sqrt{५+\sqrt{५}} = \text{कोज्या } १२^\circ$$

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

ज्या ८१° $= \frac{१}{४\sqrt{२}}(\sqrt{५}+१) + \frac{१}{४}\sqrt{५-\sqrt{५}}$ = कोज्या ९°

ज्या ८४° $= \frac{\sqrt{३}}{८}(\sqrt{५}+१) + \frac{१}{४\sqrt{२}}\sqrt{५-\sqrt{५}}$ = कोज्या ६°

ज्या ८७° $= \frac{\sqrt{३}-१}{८\sqrt{२}}(\sqrt{५}-१) + \frac{१}{४\sqrt{२}}\sqrt{५+\sqrt{५}}$

= कोज्या ३°

ज्या ९०° = १ = कोज्या ०"

(२९) अब कोणीय ज्यादि की सारणी बनाने का प्रकार ॥

(१) उस में पहिले एक कला की ज्या औ कोटिज्या का आनयन करते हैं ॥

ज्याअ $= \frac{१}{२}\left\{\sqrt{१+\text{ज्या }२\text{ अ}} - \sqrt{१-\text{ज्या }२\text{ अ}}\right\}$ इस में

यदि २ अ = १५° इसी लिये ज्या २ अ $= \frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}}$

= .२५८८१९० ४५१०२ इ०

तो ज्या $\frac{१५°}{२}$ = .१३०५२६१९२२२० इ० = $\text{ज}_१$

और जो $\text{ज}_१$ इस का २ अ के स्थान में उत्थापन करें

तो ज्या $\frac{१५°}{२^२}$ = .०६५४०३१२८२३० इ० = $\text{ज}_२$

यों बेर २ अर्द्धांशों की ज्या ली जावे तो आगे

ज्या $\frac{१५°}{२^९}$ = .०००५११३२६९०१ इ० = $\text{ज}_९$

औ $\frac{\text{ज्या }१५°}{२^{१०}}$ = .०००२५५६६३४५० इ० = $\text{ज}_{१०}$ यों उत्पन्न होती है। यहां $\text{ज}_{१०}$ यह $\text{ज}_९$. इस के आधे के समान होता है ॥

यह स्पष्ट देख पड़ता है ॥

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

इस से यह जान पड़ता है कि सूक्ष्म दो कोणों में पहिले से दूसरा जितना गुणा हो पहिले की ज्या से दूसरे की ज्या भी उतनी ही गुणी होती है ॥

इस लिये $\frac{१५ \times ६०}{२^{१०}} : \frac{१५^\circ}{२^{१०}} :: १' : \text{ज्या}\, १'$

$\therefore \text{ज्या}\, १' = \text{ज्या}\, \frac{१५^\circ}{२^{१०}} \times \frac{२^{१०}}{१५ \times ६०} = .०००२५५६६३४५७\ \text{इ०} \times \frac{२५६}{२२५}$

$= .०००२९०८८८१९२\ \text{इ०}$

और $\because \text{कोज्या}\,\text{अ} = \sqrt{१ - \text{ज्या}^२\,\text{अ}}$

$\therefore \text{कोज्या}\, १' = \sqrt{१ - (.०२९०८८८१९२\ \text{इ०})^२}$

$= .९९९९९९९५७६९२\ \text{इ०}$

दो तीन आदि लेके कला और अंशों की ज्या औ कोटिज्या का आनयन करते हैं ॥

जिस लिये $\text{ज्या}\,(\text{अ} + \text{क}) = २\, \text{ज्या}\,\text{अ} \,.\, \text{कोज्या}\,\text{क} - \text{ज्या}\,(\text{अ} - \text{क})$

$= २\, \text{ज्या}\,\text{अ} \left\{ १ - २\, \text{ज्या}^२ \frac{१}{२}\text{क} \right\} - \text{ज्या}\,(\text{अ} - \text{क})$

$= २\, \text{ज्या}\,\text{अ} - \text{ज्या}\,(\text{अ} - \text{क}) - ४\, \text{ज्या}\,\text{अ} .\, \text{ज्या}^२ \frac{१}{२}\text{क}$

इस लिये जो यहां (क) के स्थान में १′ और (अ) के स्थान में १′, २′, ३′, इत्यादि हों ॥ तो

$\text{ज्या}\, २' = \text{ज्या}\, १' + (\text{ज्या}\, १' - \text{ज्या}\, ०) - ४\, \text{ज्या}\, १' \times \text{ज्या}^२\, ३०''$

$\text{ज्या}\, ३' = \text{ज्या}\, २' + (\text{ज्या}\, २' - \text{ज्या}\, १') - ४\, \text{ज्या}\, २' \times \text{ज्या}^२\, ३०''$

$\text{ज्या}\, ४' = \text{ज्या}\, ३' + (\text{ज्या}\, ३' - \text{ज्या}\, २') - ४\, \text{ज्या}\, ३' \times \text{ज्या}^२\, ३०''$

इत्यादि होती हैं ॥

यहां एक कला की ज्या जानने पर ४ ज्या^{२} ३०″ इस का मान सहज से ज्ञात होगा तब पहिली युक्ति से दो तीन आदि कलाओं की ज्या जानना सुलभ है ॥

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

इसी युक्ति से एक अंश औ तीस कलाओं की ज्या जानके दो तीन आदि अंशों की ज्याओं को सुख से जान सकेंगे ॥

इसी प्रकार से जब कि कोज्या (अ + क) = २ कोज्याअ. कोज्याक — कोज्या (अ—क)

$$= २ कोज्याअ (१—२ ज्या^{२} \frac{१}{२} क) — कोज्या (अ—क)$$

$$= २ कोज्याअ—कोज्या (अ—क)—४ कोज्याअ. ज्या^{२} \frac{१}{२} क$$

इस लिये जो यहां क = १′ और अ = एक दो तीन आदि कला हों तो

कोज्या २′ = कोज्या १′ — (कोज्या० — कोज्या १′) — ४ कोज्या१′ × ज्या^{२} ३०″

कोज्या ३′ = कोज्या २′ — (कोज्या १′ — कोज्या २′) — ४ कोज्या २′ × ज्या^{२} ३०″

कोज्या ४′ = कोज्या ३′ — (कोज्या २′ — कोज्या ३′) — ४ कोज्या ३′ × ज्या^{२} ३०″ इ०

इस से भी ४ ज्या^{२} ३०″ इस का मान जानके दो तीन आदि कलाओं की कोटिज्याओं को जानना सुलभ है ॥

यों एक अंश की कोटिज्या औ तीस कलाओं की ज्या जानने से दो तीन आदि अंशों की भी कोटिज्या जानना सुलभ है ॥

(३) दो तीन आदि अंशों की ज्या औ कोटिज्या का आनयन प्रकारान्तर से दिखलाते हैं ॥

पहिले ज्या २ अ = २ ज्याअ . कोज्याअ औ कोज्या २ अ = २ कोज्या^{२} अ—१ } इन दोनों पर से दो अंश की ज्या औ कोटिज्या जानने के

अनन्तर ज्या (अ + क) = $\frac{(कोज्याअ + ज्याक)(कोज्याअ — ज्याक)}{कोज्या (अ — क)}$

औ कोज्या (अ + क) = $\frac{(कोज्याअ + ज्याक)(कोज्याअ — ज्याक)}{कोज्या (अ — क)}$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

इन दोनों पर से तीन चार आदि अंशों की ज्या औ कोटिज्या जानना सुलभ है ॥ सो ऐसा

$$\text{ज्या } ३^\circ = \frac{(\text{ज्या } २^\circ + \text{ज्या } १^\circ)(\text{ज्या } २^\circ - \text{ज्या } १^\circ)}{\text{ज्या } १^\circ}$$

$$\text{ज्या } ४^\circ = \frac{(\text{ज्या } ३^\circ + \text{ज्या } १^\circ)(\text{ज्या } ३^\circ - \text{ज्या } १^\circ)}{\text{ज्या } २^\circ} \quad \text{इत्यादि}$$

$$\text{कोज्या } ३^\circ = \frac{(\text{कोज्या } २^\circ + \text{ज्या } १^\circ)(\text{कोज्या } २^\circ - \text{ज्या } १^\circ)}{\text{क ज्या } १^\circ}$$

$$\text{कोज्या } ४^\circ = \frac{(\text{कोज्या } ३^\circ + \text{ज्या } १^\circ)(\text{कोज्या } ३^\circ - \text{ज्या } १^\circ)}{\text{कोज्या } २^\circ} \quad \text{इत्यादि}$$

इसी युक्ति से एक दो तीन आदि अंशों में क्रम से एक दो तीन आदि कलाओं को जोड़के उन जुड़े हुए पदों की ज्या औ कोटिज्या जानना, सुलभ है ॥ जैसा

$$\text{ज्या } (१^\circ, १') = \frac{(\text{ज्या } १^\circ + \text{ज्या } १')(\text{ज्या } १^\circ - \text{ज्या } १')}{\text{ज्या } ५९'}$$

$$\text{ज्या } (१^\circ, २') = \frac{(\text{ज्या } १^\circ + \text{ज्या } २')(\text{ज्या } १^\circ - \text{ज्या } २')}{\text{ज्या } ५८'} \quad \text{इत्यादि}$$

$$\text{कोज्या } (१^\circ, १) = \frac{(\text{कोज्या } १^\circ + \text{ज्य } १')(\text{कोज्या } १^\circ - \text{ज्या } १')}{\text{कोज्या } ५९'}$$

$$\text{कोज्या } (१^\circ, २') = \frac{(\text{कोज्या } १^\circ + \text{ज्या } २')(\text{कोज्या } १^\circ - \text{ज्या } २')}{\text{कोज्या } ५८'}$$

(४) यों इस बड़ी विधि से एक से लेके तीस अंश तक सभों की ज्या औ कोटिज्या सिद्ध करके आगे

$$\text{ज्या } (\text{अ} + \text{क}) = २ \text{ ज्या अ} \,.\, \text{कोज्या क} - \text{ज्या } (\text{अ} - \text{क})$$

$$\text{कोज्या } (\text{अ} + \text{क}) = \text{कोज्या } (\text{अ} - \text{क}) - २ \text{ ज्या अ} \,.\, \text{कोज्या क}$$

इन दोनों के आश्रय से ज्या औ कोटिज्याओं को सुख से जान लेना जैसा जो अ = ३०° औ क = एक दो तीन आदि कला हों तो

२ ज्या अ = १

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

∴ ज्या (३०° । १′) = कोज्या १′ — ज्या २९° । ५९′

ज्या (३०° । २′) = कोज्या २° — ज्या २९° । ५८′ इत्यादि

कोज्या (३०° । १′) = कोज्या २९° । ५९′ — ज्या १′

कोज्या (३०° । २′) = कोज्या २९° । ५८′ — ज्या २′ इत्यादि

यों यहां केवल अन्तर करने से ज्या औ कोटिज्या का ज्ञान होता है ॥

(५) यों पैंतालीस अंश तक सब अंशों की ज्या और कोटिज्याओं को सिद्ध करना । तब

जिस लिये ज्या (४५° + अ) = कोज्या (४५° — अ)

कोज्या (४५° + अ) = ज्या (४५° — अ)

इस लिये जो ही ४५° तक सब अंशों की ज्या औ कोटिज्या होती है सो ही उलट के पैंतालीस अंश से ले अधिक नब्बे अंश तक सब अंशों की कोटिज्या औ ज्या होती हैं ॥

यों सम्पूर्ण नब्बे अंशों की ज्या औ कोटिज्या जानने से उन की सारणी बनाना सुलभ है ॥

(६) जिस लिये ज्या (९०° + अ) = + कोज्याअ । औ कोज्या (९०° + अ) = — ज्याअ और

ज्या (१८०° + अ) = — ज्याअ । औ कोज्या (१८०° + अ) = — कोज्याअ

ज्या (२७०° + अ) = — कोज्याअ । औ कोज्या (२७० + अ) = + ज्याअ

इस लिये एक दो आदि ले नब्बे अंश तक ज्या औ कोटिज्याओं की सारणी पर से नब्बे से अधिक अंशों की ज्या औ कोटिज्या जानना सुलभ है ॥

(७) अब स्पर्शरेखा औ कोटिस्पर्श रेखाओं की सारणी बनाना

$$\text{स्पअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \text{ । और कोस्पअ} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$$

इन दोनों के आधार से सुलभ है ॥

(८) यों छेदनरेखा औ कोटिच्छेदनरेखाओं की और उत्क्रम ज्या कोत्क्रमज्याओं की सारणी बनाना ॥

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

छेअ = $\frac{१}{\text{कोज्याअ}}$ । कोछेअ = $\frac{१}{\text{ज्याअ}}$ । उअ = ज्याअ और

कोउअ = १ — ज्याअ

इन चारों उत्पत्तिओं पर से सुलभ है ॥

यों कोणीय ज्या आदि की सारणी बनाने का प्रकार दिखाया ॥

(३०) पहिले सिद्ध किये हुए ज्या आदिओं के गुणन औ भजन की अपेक्षा से उन ज्या आदिओं के घातप्रमापकसम्बन्धी गुणन औ भजन आदि में बहुत ही अल्प श्रम पड़ेगा । परन्तु जो कोणीय ज्या आदि हैं वे बहुत करके एक से न्यून होते हैं इस लिये उनके घातप्रमापक ऋण होंगे इस कारण जो कोणीय ज्या आदि हों उन को $१०^{१०}$ इस व्यासार्द्ध सम्बन्धी करके घातप्रमापक गणित में लाघव होने के लिये सारणी में लिखते हैं ॥

॥ अध्याय ३ ॥

इस अध्याय में त्रिभुज चतुर्भुज वृत्त के बाहर लगे हुए समान औ सीधे बहुभुज क्षेत्र और वृत्त इन सभों के कितने एक गुण कहे हैं ॥

(३१) त्रिभुज में तीन भुज औ उतने ही कोण मिलके छ अवयव होते हैं यह पहिले कहा है उस में तीनों कोण क्रम से आ । का औ गा । इन तीन वर्णों से दिखलाते हैं और उन के सामने के कोण क्रम से अ । क औ ग इन अक्षरों से जताते हैं ॥

(३२) हर एक त्रिभुज में हर एक भुज से उस के सामने के कोण की ज्या समान गुण होती है अर्थात् आगा की जैसी ज्याका वैसी आका की ज्यागा और का गा की ज्याआ । यों ज्या अपने २ भुज के प्रमाण में रहती है ॥

मानो कि आ का गा त्रिभुज के आ । का । गा कोण हैं और अ । क ।

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

ग। उन के सामने के भुज हैं। उस में गा कोण से (आ का) भुज पर गा घा लम्ब करो ॥

तब $ज्या आ = \frac{गाघा}{आगा}$ । $ज्या का = (ज्या गा. का घा द्वि० चे द०) = \frac{गाघा}{कागा}$

$$\therefore \frac{ज्या आ}{ज्या का} = \frac{कागा}{आगा} = \frac{अ}{क}$$

$$\therefore ज्या आ : ज्या का = अ : क$$

अथवा $अ : ज्या आ = क : ज्या का$

$ग : ज्या आ = क : ज्या गा$

$क : ज्या का = ग : ज्या गा$

(३३) अनुमान। जिस लिये $अ : क = ज्या आ : ज्या का$ इस लिये $अ + क : अ — क = ज्या आ + ज्या का : ज्या आ — ज्या का$

$= २ ज्या \frac{१}{२} (आ + का)$ कोज्या $\frac{१}{२}$ (आ — का) : २ कोज्या $\frac{१}{२}$ (आ + का) ×

$ज्या \frac{१}{२} (आ — का) = \frac{ज्या \frac{१}{२} (आ + का)}{कोज्या \frac{१}{२} (आ + का)} : \frac{ज्या \frac{१}{२} (आ - का)}{कोज्या \frac{१}{२} (आ - का)}$

$= स्प \frac{१}{२} (आ + का) : स्प \frac{१}{२} (आ — का)$

इस का अर्थ यह है कि जो दो भुजों के योग को उन का अन्तर लभ्य हो तो उन भुजों के सामने के दो कोणों के योगार्द्ध की स्पर्शरेखा को उन के अन्तरार्द्ध की स्पर्श रेखा लभ्य होगी ॥

३४ जो गा समकोण हो ॥ तो

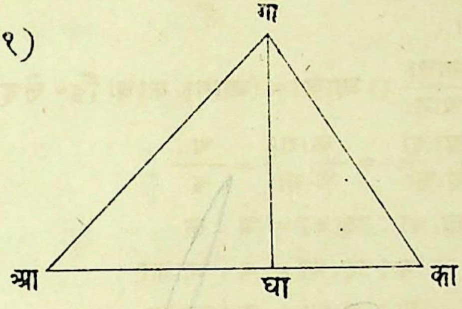
$$ज्या आ = \frac{कागा}{आका} = \frac{अ}{ग}$$

$$कोज्या आ = \frac{आगा}{आका} = \frac{क}{ग}$$

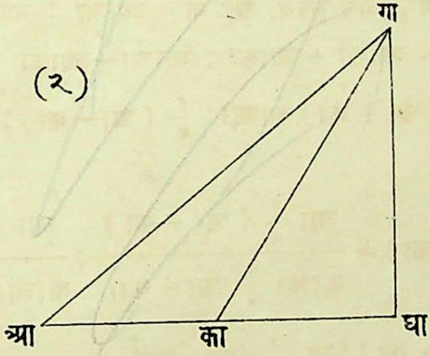
$$स्प आ = \frac{कागा}{आगा} = \frac{अ}{क}$$

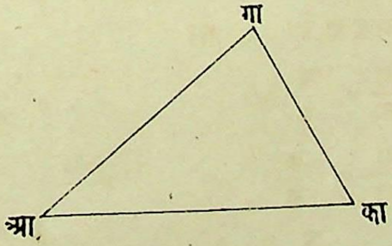
CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

(१)



(२)





CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$$\text{ज्याका} = \frac{\text{आगा}}{\text{आका}} = \frac{\text{क}}{\text{ग}}$$

$$\text{कोज्याका} = \frac{\text{कागा}}{\text{आका}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}}$$

$$\text{स्पका} = \frac{\text{आगा}}{\text{कागा}} = \frac{\text{क}}{\text{अ}}$$

३५ त्रिकोण में भुजों पर से चाहो उस कोण की कोटिज्या ले आने की युक्ति दिखलाते हैं ॥

३२वें प्रक्रम में लिखे हुए दो क्षेत्रों को देखो ।

जो का कोण लघु हो तो

$$\text{आगा}^2 = \text{आका}^2 + \text{कागा}^2 - 2\,\text{आका} \cdot \text{काघा}$$

और जब कि का बड़ा हो तो

$$\text{आगा}^2 = \text{आका}^2 + \text{कागा}^2 + 2\,\text{आका} \cdot \text{काघा}$$

ये दो समीकरण रेखागणित के दूसरे अध्याय के बारहवें और तेरहवें क्षेत्र से सिद्ध होते हैं ॥

परन्तु जब का लघु है तब तो

$$\frac{\text{काघा}}{\text{कागा}} = \text{कोज्याका}$$

$$\therefore \text{काघा} = \text{कागा} \cdot \text{कोज्याका}$$

और जब कि का बड़ा है तब

$$\frac{\text{काघा}}{\text{कागा}} = \text{कोज्यागा} \cdot \text{काघा} = -\,\text{कोज्याका}$$

$$\therefore \text{काघा} = -\,\text{कागा} \cdot \text{कोज्याका}$$

उत्थापन से दोनों स्थान में समान ही सिद्ध भया ।

$$\therefore \text{क}^2 = \text{ग}^2 + \text{अ}^2 - 2\,\text{अग} \cdot \text{कोज्याका}$$

$$\therefore \text{कोज्याका} = \frac{\text{अ}^2 + \text{ग}^2 - \text{क}^2}{2\,\text{अग}}$$

और $\therefore \text{कोज्याआ} = \dfrac{\text{क}^2 + \text{ग}^2 - \text{अ}^2}{2\,\text{कग}}$ । और कोज्यागा =

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$\frac{अ^{२} + क^{२} - ग^{२}}{}$

२६ त्रिभुज में भुजों पर से चाहो उस कोण की ज्या लेआने की युक्ति दिखलाते हैं ॥

यहां $ज्या^{२}अ = १ - कोज्या^{२}अ = (१ + कोज्याअ)(१ - कोज्याअ)$

परन्तु $१ + कोज्याअ = १ + \frac{क^{२} + ग^{२} - अ^{२}}{२ कग} =$

$$\frac{२ कग + क^{२} + ग^{२} - अ^{२}}{२ कग}$$

$$= \frac{(क^{२} + २ कग + ग^{२}) - अ^{२}}{२ कग} = \frac{(क + ग)^{२} - अ^{२}}{२ कग} =$$

$$\frac{(क + ग + अ)(क + ग - अ)}{२ कग}$$

वैसाही $१ - कोज्याअ = १ - \frac{क^{२} + ग^{२} - अ^{२}}{२ कग} =$

$$\frac{२ कग - क^{२} - ग^{२} + अ^{२}}{२ कग}$$

$$= \frac{अ^{२} - (क^{२} - २ कग + ग^{२}}{२ कग} = \frac{अ^{२} - (क - ग)^{२}}{२ कग}$$

$$= \frac{(अ + क - ग)(अ - क + ग)}{२ कग}$$

और जो $२ स = अ + क + ग$ मान लेवें तो

$$२ (स - अ) = अ + क + ग - २ अ = क + ग - अ$$

$$२ (स - क) = अ + क + ग - २ क = अ + ग - क$$

$$२ (स - क) = अ + क + ग - २ ग = अ + क - ग$$

$$\therefore १ + कोज्याअ = \frac{२ स \times २ (स - अ)}{२ कग} = \frac{२ स (स - अ)}{कग}$$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

ऐसा ही $१ - कोज्या आ = \frac{२ (स - क) \times २ (स - ग)}{२ कग} = \frac{२ (स - क) (स - ग)}{कग}$

इसीलिये $ज्या^{२} आ = \frac{४}{क^{२} ग^{२}} स (स - अ) (स - क) (स - ग)$

$\therefore ज्या आ = \frac{२}{क ग} \sqrt{स (स - अ) (स - क) (स - ग)}$

यहां ज्या का मान ऋण नहीं हो सकता क्योंकि त्रिभुज का कोई एक कोण दो समकोण से न्यून ही होती है और उस की ज्या धन ही होती है ॥

इसी प्रकार से $ज्या का = \frac{२}{अ ग} \sqrt{स (स - अ) (स - क) (स - ग)}$

और $ज्या गा = \frac{२}{अ क} \sqrt{स (स - अ) (स - क) (स - ग)}$

३७ त्रिकोण में केवल भुजों को जान के चाहो उस कोण की ज्या कोटिज्या और स्पर्शरेखाओं के अर्द्धों के मान दिखलाते हैं ॥

जिस लिये $२ ज्या^{२} \frac{१}{२} आ = १ - कोज्या आ = \frac{२ (स - क) (स - ग)}{कग}$

$\therefore ज्या \frac{१}{२} आ = \sqrt{\frac{(स - क) (स - ग)}{क ग}}$

यों $\because २ कोज्या^{२} \frac{१}{२} आ = १ + कोज्या आ = \frac{२ स (स - अ)}{क ग}$

$\therefore कोज्या \frac{१}{२} आ = \sqrt{\frac{स (स - अ)}{क ग}}$

इसी लिये $स्प \frac{१}{२} आ = \frac{ज्या \frac{१}{२} आ}{कोज्या \frac{१}{२} आ} = \sqrt{\frac{(स - क) (स - ग)}{स (स - अ)}}$

यहां भी धन ही जानना

$\therefore ज्या \frac{१}{२} का = \sqrt{\frac{(स - अ) (स - ग)}{अग}}$;

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$$\text{और ज्या}\ \frac{१}{२}\ \text{गा} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{अ})\ (\text{स}-\text{क})}{\text{अक}}}$$

$$\text{कोज्या}\ \frac{१}{२}\ \text{का} = \sqrt{\frac{\text{स}\ (\text{स}-\text{क})}{\text{अग}}} : \text{कोज्या}\ \frac{१}{२}\ \text{गा} = \sqrt{\frac{\text{स}\ (\text{स}-\text{ग})}{\text{अक}}}$$

$$\text{स्प}\ \frac{१}{२}\ \text{का} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{अ})\ (\text{स}-\text{ग})}{\text{स}\ (\text{स}-\text{क})}} : \text{स्प}\ \frac{१}{२}\ \text{गा} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{अ})\ (\text{स}-\text{क})}{\text{स}\ (\text{स}-\text{ग})}}$$

२८ त्रिकोण में तीन भुजों पर से क्षेत्रफल निकालने की रीति दिखलाते हैं ॥

भूमि के आधे को लम्ब से गुण उस का आधा करने से जो बनता है वह क्षेत्रफल होता है ॥

$$\therefore\ \text{आकागा त्रिकोण का फल} = \frac{१}{२}\ \text{आका} \times \text{गाघा}$$

$$= \frac{१}{२}\ \text{आका} \times \text{आगा} \times \frac{\text{गाघा}}{\text{आगा}}$$

$$= \frac{१}{२}\ \text{आका} \times \text{आगा} \times \text{ज्याआ} = \frac{\text{कग}}{२} \cdot \frac{२}{\text{कग}} \times$$

$$\sqrt{\text{स}\ (\text{स}-\text{अ})\ (\text{स}-\text{क})\ (\text{स}-\text{क})}$$

$$= \sqrt{\text{स}\ (\text{स}-\text{अ})\ \text{स}-\text{क})\ (\text{स}-\text{ग}}$$

इसी लिये आर्य भट्ट ने लिखा है कि

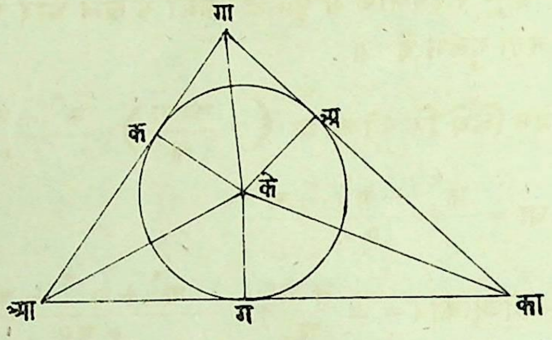
सर्व भुजैक्यं दलितं चतुःस्थितं बाहुभिः क्रमाद्रहितम् ॥
तद्घातपदं त्रिभुजे क्षेत्रे स्पष्टं फलं भवति ॥

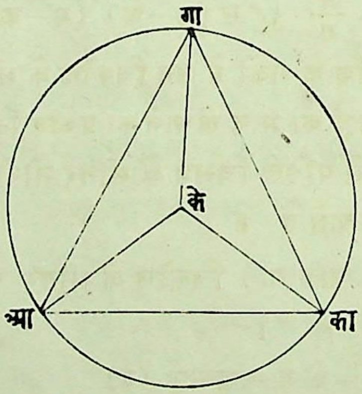
इस का अर्थ। त्रिभुजक्षेत्र में सब भुजों के योग के आधे को चार स्थान में रखके उन में क्रम से उन भुजों को घटा के उन शेष बचे हुए भुजों के गुणनफल का मूल लेना सो क्षेत्रफल होता है ॥

२९ त्रिभुज का फल $= \frac{१}{२}$ आका × आगा × ज्याआ यह पिछले प्रक्रम में सिद्ध हुआ है इस लिये त्रिभुज में दो भुजों के गुणनफल के

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha





CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

आधे को उन भुजों के बीच में जो कोण उत्पन्न हो उससे गुण देने से क्षेत्रफल बनता है ॥

४० अनु० १ त्रिकोण में पूर्वोक्त प्रकारों से लम्ब और आबाधा आदि को जानना सुलभ है ॥

जैसा जिस लिये कि कोज्याअ $\left(= \frac{\text{आघा}}{\text{क}}\right) = \frac{\text{क}^2 + \text{ग}^2 - \text{अ}^2}{२ \text{ कग}}$

$$\therefore \text{ आघा} = \frac{\text{क}^2 + \text{ग}^2 - \text{अ}^2}{२ \text{ ग}}$$

और $\because$ कोज्याका $\left(= \pm \frac{\text{काघा}}{\text{अ}}\right) = \frac{\text{अ}^2 + \text{ग}^2 - \text{क}^2}{२ \text{ अग}}$

$$\therefore \text{ काघा} = \pm \frac{\text{अ}^2 + \text{ग}^2 - \text{क}^2}{२ \text{ ग}}$$

यहां त्रिभुज के भीतर वा बाहर लम्ब गिरने के अनुसार दूसरी आबाधा का धनत्व वा ऋणत्व जान लेना ॥

$$\left\{\begin{array}{l} \text{यों ही } \therefore \text{ ज्याअ} \left(= \frac{\text{गाघा}}{\text{क}}\right) = \frac{२}{\text{कग}} \sqrt{\text{स}(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})} \\ \therefore \text{ गाघा} = \frac{२}{\text{ग}} \sqrt{\text{स}(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})} \end{array}\right.$$

४१ त्रिकोण के भुजों से उस त्रिकोण के भीतर वा बाहर लगे हुए वृत्तों के व्यासार्द्ध का मान ले आने का प्रकार दिखलाते हैं ॥

(१) उस में पहिले त्रिभुज के भीतर तीनों भुजों से लगे हुए वृत्त का व्यासार्द्ध ले आते हैं ॥

जैसा जो (आकागा) त्रिकोण के भीतर लगे हुए वृत्त का केन्द्र (के) मान लें ॥ तो

के अ = के क = के ग = व्यसार्द्ध (व)

और फ = △ अ के का + △ का के गा + △ अ के गा

$$= \frac{१}{२} \text{ गव} + \frac{१}{२} \text{ अव} + \frac{१}{२} \text{ क व} = \frac{\text{अ} + \text{क} + \text{ग}}{२} \text{ व} = \text{सव}$$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$$\therefore \text{व} = \frac{\text{फ}}{\text{स}} = \frac{\sqrt{\text{स (स—अ) (स—क) (स—ग)}}}{\text{स}}$$

(२) त्रिकोण के बाहर लगे हुए वृत्त का व्यासार्द्ध ले आने की रीति दिखलाते हैं ॥

जो (आकागा) त्रिभुज के बाहर लगे हुए वृत्त का केन्द्र (के) मान लेवें ॥ तो

$$\text{केआ} = \text{केका} = \text{केग व्यासार्द्ध (वा)}$$

और समान भूमि में केन्द्र औ परिधि से लगे हुए दो कोणों में पहिला अर्थात केन्द्र में लगा हुआ दूसरे से अर्थात परिधि में लगे हुए से दूना होता है इस लिये (३७ वे प्रक्रम से) ॥

$\text{फ} = \frac{१}{२} \text{अक} \cdot \text{ज्या} \frac{१}{२} \text{आकेका}$ यों सिद्ध होता है ।

$$\text{परन्तु ज्या} \frac{१}{२} \text{आकेका} = \frac{\frac{१}{२}\text{आका}}{\text{आके}} = \frac{\text{ग}}{२ \text{ वा}}$$

$$\therefore \text{फ} = \frac{\text{अकग}}{४ \text{ वा}} \quad \therefore \text{वा} = \frac{\text{अकग}}{४ \text{ फ}} = \frac{\text{अकग}}{\sqrt{\text{स (स—अ) (स—क) (स—ग)}}}$$

इस पर से यह जान पड़ता है कि त्रिभुज में किसी कोण की ज्या उस कोण के सामनेवाले भुज में त्रिभुज के बाहर लगे हुए वृत्त के व्यास से भाग लेने से जो भजनफल आता है उस के समान होती है ॥

४२ अनुमान । जो (आकागा) त्रिभुज में (गा) कोण से (आका) भूमि पर लम्ब (ल) करें ॥ तो

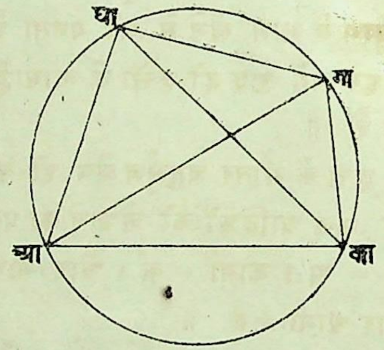
$\text{फ} = \frac{१}{२} \text{गल}$ । और भी पिछले प्रक्रम से सिद्ध हुआ है कि $\text{फ} = \frac{\text{अकग}}{४ \text{ वा}}$

$$\therefore \frac{१}{२} \text{गल} = \frac{\text{अकग}}{४ \text{ वा}} \quad \therefore \text{वा} = \frac{\text{अक}}{२ \text{ ल}}$$

इसी लिये श्री बापूदेव जी ने एक क्रोड़ ग्रन्थ ऐसा बनाया है कि जो सिद्धान्त के अनेक विषयों से भरा हुआ है उस में लिखा है ॥ कि

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha



CC-0. In Public Domain. Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

॥ त्रिबाहुकबहिर्लग्नवृत्तव्यासदलं किल ॥
॥ भुजयोराहतेः खण्डाल्लम्बाप्तेनसमं भवेत् ॥

इस श्लोक का अर्थ यह है कि त्रिकोण के बाहर लगे हुए वृत्त के व्यास का आधा शेष दो भुजों के गुणनफल में दूने लम्ब से भाग लेने से जो लब्ध हो उसके समान होता है ॥

४३ अनुमान २। जिस लिये $फ = \frac{अ + क + ग}{२} \times व$

$= \frac{अकग}{४ वा} \therefore २ वा व = \frac{अकग}{अ + क + ग}$

इस से यह जान पड़ता है कि त्रिभुज में तीन भुजों के गुणनफल में उन तीनों के योग से भाग लेने से जो बनता है सो उस त्रिभुज के भीतर और बाहर लगे हुए दो वृत्तों के व्यासार्द्धों के दूने गुणनफल के समान होता है ॥

४४ किसी वृत्त के भीतर चतुर्भुज क्षेत्र हो उस के भुजों से उसके कोण कर्ण और फल आदिओं को लेआने का प्रकार दिखलाते हैं ॥

यहां आका = अ । कागा = क । और गाघा = ग घाआ = घ काघा = च और आगा = छ ॥

(१) तो (३५वें प्रक्रम से) $कोज्याआ = \frac{अ^२ + घ^२ — च^२}{२ अघ}$

$कोज्यागा = \frac{क^२ + ग^२ — च^२}{२ कग}$

$\therefore च^२ = अ^२ + घ^२ - २ अघ. कोज्याआ = क^२ + ग^२ - २ कग. कोज्यागा$

परन्तु क्षेत्रमिती के तीसरे अध्याय की इक्कीसवीं प्रतिज्ञा से

$कोज्याआ = कोज्या (१८०° — ग) = — कोज्यागा$

$\therefore अ^२ + घ^२ — २ अघ . कोज्याआ = क^२ + ग^२ + २ कग. कोज्याआ$

$\therefore कोज्याआ = \frac{अ^२ + घ^२ — क^२ — ग^२}{२ (अघ + गघ)} = — कोज्यागा$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

इसी प्रकार से कोज्याका $= \frac{\text{अ}^2 + \text{क}^2 - \text{ग}^2 - \text{घ}^2}{२ (\text{अक} + \text{गघ})} = -$ कोज्याघा

(२) इस लिये (३६वें) प्रक्रम में कही हुई युक्ति से सिद्ध हुआ कि

ज्या आ $= \frac{२}{\text{अघ} + \text{कग}} \sqrt{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})(\text{स}-\text{घ})}$

इस समीकरण में स $= \frac{\text{अ} + \text{क} + \text{ग} + \text{घ}}{२}$ यह जान लेना

(३) यों ही (३७वें) प्रक्रम में कही हुई युक्ति से सिद्ध हुआ कि

$$\text{ज्या } \frac{१}{२} \text{ आ} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{घ})}{\text{अघ} + \text{कग}}} = \text{कोज्या } \frac{१}{२} \text{ गा}$$

$$\text{कोज्या } \frac{१}{२} \text{ आ} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}{\text{अघ} + \text{कग}}} = \text{ज्या } \frac{१}{२} \text{ गा}$$

$$\text{स्प } \frac{१}{२} \text{ आ} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{घ})}{(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})}} = \text{कोस्प } \frac{१}{२} \text{ गा}$$

(४) अब $\because \frac{\text{अ}^2 + \text{घ}^2 - \text{च}^2}{२\,\text{अघ}} = - \frac{\text{क}^2 + \text{ग}^2 - \text{च}^2}{२\,\text{कग}}$

$$\therefore \text{च}^2 = \frac{(\text{अग} + \text{कघ})(\text{अक} + \text{गघ})}{\text{अघ} + \text{कग}}$$

$$\text{और छ}^2 = \frac{(\text{अग} + \text{कघ})(\text{अघ} + \text{कग})}{\text{अक} + \text{गघ}}$$

इस से ॥ कर्णाश्रितभुजघातैक्यमुभयथाऽन्योन्यभाजितं गुणयेत् ॥

॥ योगेन भुजप्रतिभुजवधयोः कर्णौ पदे विषमे ॥

यह प्रकार श्री ब्रह्मगुप्ताचार्य जी ने कहा है सो वृत्त के भीतर जो विषमचतुर्भुज होते हैं उन पर लगता है। ऐसा जान पड़ता है ॥

(५) इसी लिये चछ = अग + कघ और $\frac{\text{च}}{\text{छ}} = \frac{\text{अक} + \text{गघ}}{\text{अघ} + \text{कग}}$

इसी लिये श्री वापूदेव जी के बनाये हुए क्रोड़ ग्रंथ में लिखा है कि

CC-0. In Public Domain. Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

॥ वृत्तान्तस्थचतुर्बाहुक्षेत्रे श्रवणयोर्हतिः ॥
॥ भुजप्रतिभुजाहत्योः समासेन समा भवेत् ॥

(६) आकागाघा चतुर्भुज का फल = △ अकाघा + △ कागाघा = $\frac{१}{२}$ अघ. ज्याआ + $\frac{१}{२}$ कग. ज्याआ = $\frac{१}{२}$ (अघ + कग) ज्याआ

= $\sqrt{(स-अ)(स-क)(स-ग)(स-घ)}$ इस पर से यह सिद्ध होता है कि,

भुजसमासदलं हि चतुः स्थितं निजभुजैः क्रमशः पृथगूनितम् ॥ अथ परस्परमेव समाहतं क्षतिपदं चिचतुर्भुजयोःफलम् ॥

यह प्रकार श्रीपती जी ने अपने ग्रंथ में लिखा है सो वृत्त के भीतर जो चतुर्भुज बनेंगे उन पर लगता है ऐसा जान पड़ता है ॥

(७) जो (आकाघा) त्रिभुज से लगे हुए वृत्त का व्यासार्ध (वा) मानलें

तो (४१वें प्रक्रम से) वा = $\frac{अघच}{४ \triangle आकाघा}$

परन्तु △ आकाघा = $\frac{१}{२}$ अघ . ज्याआ

$$\therefore वा = \frac{अघच}{२ अघ.ज्याआ} = \frac{च}{२ ज्याआ} = \frac{च}{२ ज्यागा}$$

$$ऐसा ही वा = \frac{छ}{२ ज्याका} = \frac{छ}{२ ज्याघा}$$

$$अब \because ज्याआ = \frac{२}{अघ + कग}\sqrt{(स-अ)(स-क)(स-ग)(स-घ)}$$

$$\therefore वा \left(= \frac{च}{२ ज्याआ}\right) = \frac{च (अघ + कघ)}{४\sqrt{(स-अ)(स-क)(स-ग)(स-घ)}}$$

$$= \frac{१}{४}\sqrt{\frac{(अक + गघ)(अग + कग)(अघ + कग)}{(स-अ)(स-क)(स-ग)(स-घ)}}$$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

इस से यह जान पड़ता है कि विषमचतुर्भुज मात्र को वृत्त के भीतर बना सकते हैं। और भुजों का क्रम बदलने से भी क्षेत्रफल में विकार नहीं होता किन्तु कोण आदिओं में होता है, और जो यहां घ = ० मान लें तो कोण आदिओं के मान वे आते हैं जो कि पहिले सिद्ध किए हुए त्रिभुज के कोण आदिओं के मानों से अभिन्न सिद्ध होते हैं ॥

(४५) विषमचतुर्भुज मात्र के आपस में दो संमुख कोण से लगे हुए भुजों पर से क्षेत्रफल ले आने की रीति दिखलाते हैं ॥

पहिले प्रक्रम में लिखे हुए क्षेत्र को देखो

अब यहां क्षेत्रफल का द्योतक फ मानलें

तो $\text{फ} = \frac{१}{२}(\text{अघ.ज्याअ} + \text{कग.ज्याका})$

परन्तु $\text{कोज्याअ} = \frac{\text{अ}^{२} + \text{घ}^{२} - \text{च}^{२}}{\text{२ अघ}}$ और $\text{कोज्यागा} = \frac{\text{क}^{२} + \text{ग}^{२} - \text{च}^{२}}{\text{२ कग}}$

$$\therefore\ १ + \text{कोज्याअ} = \frac{(\text{अ} + \text{घ})^{२} - \text{च}^{२}}{\text{२ अघ}} \qquad (१)$$

$$\text{और } १ - \text{कोज्याअ} = \frac{\text{च}^{२} - (\text{अ} - \text{घ})^{२}}{\text{२ अघ}} \qquad (२)$$

$$\text{ऐसा ही } १ + \text{कोज्यागा} = \frac{(\text{क} + \text{ग})^{२} - \text{च}^{२}}{\text{२ कग}} \qquad (३)$$

$$\text{और } १ - \text{कोज्यागा} = \frac{\text{च}^{२} - (\text{क} - \text{ग})^{२}}{\text{२ कग}} \qquad (४)$$

अब (१) पहिले और (४) चौथे समीकरण से दो पक्ष सिद्ध होते हैं ॥ जैसा

$$(\text{अ} + \text{घ})^{२} - (\text{क} - \text{ग})^{२} = \text{२ अघ}\,(१ + \text{कोज्याअ}) + \text{२ कग}\,(१ - \text{कोज्यागा})$$

$$\text{वा } (\text{स} - \text{क})(\text{स} - \text{ग}) = \text{अघ}.\frac{१ + \text{कोज्याअ}}{२} + \text{कग}.\frac{१ - \text{कोज्यागा}}{२}$$

CC-0. In Public Domain. Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$$= \text{अघ. कोज्या}^{\text{२}} \frac{\text{१}}{\text{२}} \text{आ} + \text{कग. ज्या}^{\text{२}} \frac{\text{१}}{\text{२}} \text{गा} \quad (\text{५})$$

ऐसा ही (२) और (३) ऐसे दो पक्ष सिद्ध होते हैं ॥ जैसा

$$(\text{स}—\text{अ})(\text{स}—\text{घ}) = \text{अघ. ज्या}^{\text{२}} \frac{\text{१}}{\text{२}} \text{आ} + \text{कग. कोज्या}^{\text{२}} \frac{\text{१}}{\text{२}} \text{गा} \quad (\text{६})$$

अब (५) वे और (६) वे को आपस में गुण देने से गुणनफल सिद्ध हुआ ॥ जैसे

$$(\text{स}—\text{अ})(\text{स}—\text{क})(\text{स}—\text{ग})(\text{स}—\text{घ}) = \text{अ}^{\text{२}}\text{घ}^{\text{२}}\text{. ज्या}^{\text{२}} \frac{\text{१}}{\text{२}} \text{आ.कोज्या}^{\text{२}} \frac{\text{१}}{\text{२}} \text{आ}$$

$$+ \text{क}^{\text{२}}\text{ग}^{\text{२}}\text{. ज्या}^{\text{२}} \frac{\text{१}}{\text{२}} \text{गा. कोज्या}^{\text{२}} \frac{\text{१}}{\text{२}} \text{गा} + \text{अकगघ.ज्या}^{\text{२}} \frac{\text{१}}{\text{२}} \text{आ. ज्या}^{\text{२}} \frac{\text{१}}{\text{२}} \text{गा}$$

$$= (\text{अघ.ज्या} \frac{\text{१}}{\text{२}} \text{आकोज्या} \frac{\text{१}}{\text{२}} \text{आ.} + \text{कग.ज्या} \frac{\text{२}}{\text{१}} \text{गा.कोज्या} \frac{\text{१}}{\text{२}} \text{गा})$$

$$+ \text{अकगघ} (\text{कोज्या} \frac{\text{१}}{\text{२}} \text{आ.कोज्या} \frac{\text{१}}{\text{२}} \text{गा} - \text{ज्या} \frac{\text{१}}{\text{२}} \text{आ.ज्या} \frac{\text{१}}{\text{२}} \text{गा})^{\text{२}}$$

$$= \frac{\text{१}}{\text{४}} (\text{अघ.ज्याआ} + \text{कग . ज्यागा})^{\text{२}} + \text{अकगघ. कोज्या}^{\text{२}} \frac{\text{१}}{\text{२}} (\text{आ} + \text{गा})$$

$$= \text{फ}^{\text{२}} + \text{अकगघ . कोज्या}^{\text{२}} \frac{\text{१}}{\text{२}} (\text{आ} + \text{गा})$$

$$\therefore \text{फ} = \sqrt{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ग})(\text{स}-\text{घ}) - \text{अकगघ.कोज्या}^{\text{२}} \frac{\text{१}}{\text{२}} (\text{आ}+\text{गा})}$$

और जिस लिये $\text{आ} + \text{का} + \text{गा} + \text{घा} = \text{३६०}^\circ \therefore \frac{\text{१}}{\text{२}} (\text{आ} + \text{गा}) = \text{१८०}^\circ - \frac{\text{१}}{\text{२}} (\text{का} + \text{घा})$

और भी $\therefore \text{कोज्या}^{\text{२}} \frac{\text{१}}{\text{२}} (\text{आ}+\text{गा}) = \text{कोज्या}^{\text{२}} \frac{\text{१}}{\text{२}} (\text{का} + \text{घा})$

इस लिये यह फल दो सन्मुख कोणों में से किसी एक कोण से लगे हुए चार भुजों पर से सिद्ध हुआ ॥

अब जो $\text{आ} + \text{गा} = \text{का} + \text{घा} = \text{१८०}^\circ$

तो $\text{कोज्या}^{\text{२}} \frac{\text{१}}{\text{२}} (\text{आ}+\text{गा}) = \text{कोज्या}^{\text{२}} \frac{\text{१}}{\text{२}} (\text{का} + \text{घा}) = \text{०}$

इस लिये यहां $\text{फ} = \sqrt{(\text{स}—\text{अ})(\text{स}—\text{क})(\text{स}—\text{ग})(\text{स}—\text{घ})}$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

यह पहिले सिद्ध किये हुए वृत्त के भीतर चतुर्भुज के मान से अभिन्न सिद्ध हुआ ॥

४६ वृत्त के भीतर रहने हारे समान औ सरल बक्र भुज क्षेत्र अर्थात जिस में भुज वक्रत हैं ऐसे क्षेत्र का परिधि और फल ले आने की युक्ति का कार दिखलाते हैं ॥

यहां (क) वृत्त का केन्द्र है और उस के भीतर ऐसा एक वक्र भुज क्षेत्र है जिस के भुजों की संख्या (न) हो उस क्षेत्र का एक भुज अग है और (व) वृत्त का व्यासार्ध है तब कअ और कग मिलाके अग रेखा पर कब लम्ब करो ॥

तब $< \text{अकग} = \frac{३६०^\circ}{\text{न}}$

और बक्रभुज क्षेत्र का परिधि $= \text{न. अग}$

$= २ \text{ न. अब}$

$= २ \text{ न. अक. ज्याअकब}$

$= २ \text{ नव ज्या } \frac{१८०^\circ}{\text{न}}$

और भी बक्रभुज क्षेत्र का परिधि $= \text{न. अकग क्षेत्र}$

$= \text{न. } \frac{\text{अग. कव}}{२}$

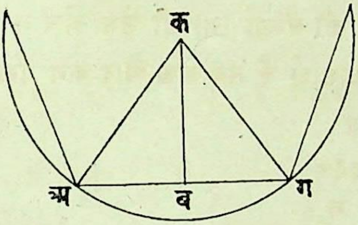
$= \text{न} \times \text{अक. ज्याअकव} \times \text{अक. कोज्याअकब}$

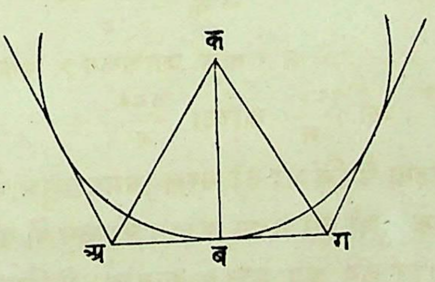
$= \text{नव}^{२} \text{. ज्या } \frac{१८०^\circ}{\text{न}} \text{ कोज्या } \frac{१८०^\circ}{\text{न}}$

इस से जान पड़ता है कि जो दो सरल समबक्रभुज क्षेत्र सजातीय हों अर्थात जिन के भुजों की संख्या समान हो उन में पहिले क्षेत्र का परिधि उस के बाहर लगे हुए वृत्त के व्यासार्धं से जितने गुण होगा उतने ही गुण दूसरे क्षेत्र का परिधि उस के बाहर लगे हुए वृत्त के व्यासार्ध से होगा ॥

और पहिले क्षेत्र का फल उस के बाहर लगे हुए वृत्त के व्यासार्धं

CC-0. In Public Domain. Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha





CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

के वर्ग से जितने गुण हो उतने ही गुण दूसरे क्षेत्र का फल उसके बाहर लगे हुए वृत्त के व्यासार्ध के वर्ग से होता है ॥

४७ वृत्त के बाहर लगे हुए सीधे और समान बहुभुज क्षेत्र का परिधि और फल ले आने की रीति दिखलाते हैं ॥

यहां अग बाहर लगे हुए (न) संख्या के समान ऋजुभुज क्षेत्र का भुज है सो परिधि में (व) स्थान में लगा है। इस लिये बाहर लगे हुए बहुभुज क्षेत्र का परिधि = न × अग

= २ न . अव

= २ न. कव. स्पअकव

$$= २ नव. स्प \frac{१८०^\circ}{न}$$

और क्षेत्रफल = न. अकग, क्षेत्रफल

$$= न \times \frac{अग . कव}{२}$$

= न . कव . स्पअकव × कव

$$= न . व^{२} . स्प \frac{१८०^\circ}{न}$$

इस पर से यह जाना जाता है कि जिन समान ऋजु भुज क्षेत्रों की भुज संख्या समान हो उन में उन २ क्षेत्रों का परिधि उन २ क्षेत्रों के भीतर लगे हुए वृत्त के व्यासार्ध से समान गुण होता है और उन २ क्षेत्रों का फल उन २ क्षेत्रों के भीतर लगे हुए वृत्त के व्यासार्ध के वर्ग से समानगुण होता है ॥

४८ जिस वृत्त का व्यासार्ध व हो उस के भीतर और बाहर लगे हुए समान ऋजु (न) संख्या के बहुभुज क्षेत्रों के परिधि क्रम से (प) और (पा) हों और फल (फ) और (फा) हों

$$तब \frac{प}{पा} = \frac{२ नव . ज्या \frac{१८०^\circ}{न}}{२ नव . स्प \frac{१८०^\circ}{न}} = कोज्या \frac{१८०^\circ}{न}$$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

श्रीर $\frac{फ}{फा} = \frac{नव^{२}\ ज्या\ \frac{१८०^{\circ}}{न}\ .\ कोज्या\ \frac{१८०^{\circ}}{न}}{नव^{२}.\ स्प\ \frac{१८०^{\circ}}{न}} = कोज्या^{२}\ \frac{१८०^{\circ}}{न}$

यहां जो न = ∞ हो तो

$$\frac{प}{पा} = कोज्या\ \frac{१८०^{\circ}}{\infty} = कोज्या\ ०^{\circ} = १$$

वैसा ही $\frac{फ}{फा} = कोज्या^{२}\ \frac{१८०^{\circ}}{\infty} = कोज्या^{२}\ ०^{\circ} = १$

∴ प = पा श्रीर फ = फा होगा

इसी लिये वृत्त के भीतर वा बाहर लगे ऊए बक्रभुज क्षेत्रों की संख्या ज्यों २ अधिक हो त्यों २ वे हर एक क्षेत्र उस वृत्त क्षेत्र के समीप होंगे श्रीर जब भुज की संख्या अनन्त हो तो वे दो क्षेत्र सर्वांशों से आपस में मिलेंगे। इस लिये वृत्त बक्रभुज क्षेत्र होने के योग्य है जिस में कि भुज संख्या अनन्त है। इस से यह जान पड़ता है कि हर एक वृत्त का परिधि अपने २ व्यासार्ध से समान गुण होता है श्रीर हर एक वृत्त का क्षेत्रफल अपने २ व्यासार्ध के वर्ग से समान गुण होता है॥

४८ अब वृत्तक्षेत्र का परिधि श्रीर फल लेश्राने की रीति दिखलाते हैं ॥

(१) यहां वृत्त के भीतर का बक्रभुजक्षेत्र परिधि = २ नव. ज्या $\frac{१८०^{\circ}}{न}$

अब जैसी २ न संख्या अधिक होगी वैसा २ यह परिधि वृत्त के परिधि के बऊत ही पास २ होगा इस लिये पहिले (ज्या $\frac{१८०^{\circ}}{न}$) इस का ऐसा मान सिद्ध करना जिस में (न) संख्या बड़ी हो। सो ऐसा श्रीर ∵ (२४) वे प्रक्रम में लिखे ऊए (फा) से

$$कोज्या\ \frac{अ}{२} = \frac{१}{\sqrt{२}} \sqrt{१ + कोज्या\ अ}$$

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$$\therefore \text{ कोज्या } \frac{९०^\circ}{२} = \frac{१}{\sqrt{२}}$$

$$\text{कोज्या } \frac{९०^\circ}{२^२} = \frac{१}{\sqrt{२}}\sqrt{१ + \frac{१}{\sqrt{२}}}$$

$$\text{कोज्या } \frac{९०^\circ}{२^३} = \frac{१}{\sqrt{२}}\sqrt{१ + \sqrt{१ + \frac{१}{\sqrt{२}}}}$$

यों ही आगे भी जान लेना

इसी रीति से कोज्या $\frac{९०^\circ}{२^प}$ इस का ऐसा मान ले आ सकते हैं कि जिस में (प) संख्या बड़ी हो ॥

और जो न = $२^प$ मान लें

तो $\text{ज्या } \frac{१८०^\circ}{न} = २ \text{ कोज्या } \frac{९०^\circ}{२^प} \text{ ज्या } \frac{९०^\circ}{२^प}$

$= २ \text{ कोज्या } \frac{९०^\circ}{२^प} \sqrt{१ - \text{कोज्या}^२ \frac{९०^\circ}{२^प}}$ पास २ होगा

यों सिद्ध किये हुए ज्या $\frac{१८०^\circ}{न}$ इस के मान को (न) संख्या से गुण देने पर ॥

३.१४ १५ ९२ ६५ इत्यादि होता है यह ϖ इस चिन्ह से जताया जावे

तब वृत्त का परिधि = २ ϖव

(२) पिछले प्रक्रम में जनाये हुए (प), (फ) अक्षरों के मान क्रम से ॥

२ नव . ज्या $\frac{१८०^\circ}{न}$ । नव^२. ज्या $\frac{१८०^\circ}{न}$ कोज्या $\frac{१८०^\circ}{न}$ ये हैं

$$\frac{फ}{प} = \frac{नव^२.\text{ज्या } \frac{१८०^\circ}{न} \text{ कोज्या } \frac{१८०^\circ}{न}}{२ \text{ नव. ज्या } \frac{१८०^\circ}{न}} = \frac{१}{२} \text{ व. कोज्या } \frac{१८०^\circ}{न}$$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

अब वृत्त रूप बहुभुजक्षेत्र में न = ∞

इस लिये कोज्या $\frac{१८०^\circ}{न}$ = कोज्या ०° = १

और पहिले सिद्ध हुआ है कि प = २ ϖव ∴ फ = ϖव^{२}

(३) यों अकब वृत्त खंड का भी फल झटपट जान पड़ता है (पास लिखे हुए क्षेत्र को देखो) यहां अब चाप की लम्बाई = अ और व्यासार्ध = व हो तो क्षेत्रमिती के छठवें अध्याय की तैंतीसवीं प्रतिज्ञा से यों सिद्ध होता है कि

अकब वृत्त खंड : अगचव ⊙ : : अ : २ ϖव

$$\therefore \quad \text{अकब वृत्त खंड} = \frac{\text{अ}}{\text{२ ϖव}} \times \text{अगϖच} \odot$$

$$= \frac{\text{अ}}{\text{२ ϖव}} \times \text{ϖव}^{२} = \frac{१}{२} \text{ अव}$$

(४) अब चाप की बस ज्या और अन स्पर्शरेखा है। अब जो अब रेखा करें तो अकब वृत्त खंड अकब त्रिभुज से बडा होगा और अकन त्रिभुज से छोटा होगा ॥

$$\therefore \frac{१}{२} \text{अक} \cdot \text{अव} > \frac{१}{२} \text{अक} \cdot \text{बस} < \frac{१}{२} \text{अक} \cdot \text{अन}$$

$$\therefore \quad \text{अव} > \text{बस} < \text{अन}$$

इस लिये अकब लघु कोण के सामने का अब चाप अपनी ज्या से बड़ा होगा और स्पर्शरेखा से छोटा होगा उसी को लिख के दिखलाते हैं ॥

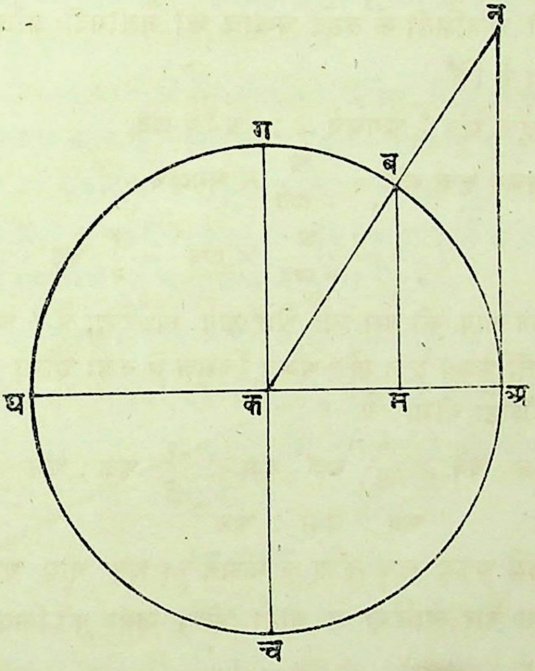
$$\text{अ} > \text{ज्याअ} < \text{स्पअ}$$

और जो अ = ० हो तो

$$\frac{\text{ज्याअ}}{\text{स्पअ}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{व}} = \frac{\text{कोज्या } ०^\circ}{\text{व}} = \frac{\text{व}}{\text{व}} = १$$

इस पर से यह अनुमान करते हैं कि अत्यन्त छोटे चाप की ज्या और स्पर्शरेखा आपस में समान ही होती हैं और इसी लिये वे हर एक अपने चाप के समान होते हैं ॥

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha



CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$$\frac{\text{ज्याअ}}{\text{अ}} = \frac{\text{स्पअ}}{\text{अ}} = १$$

५० एक त्रिज्या में जो चाप के ज्या आदि होते हैं वेही उस चाप के कोण के भी होते हैं (यह १४ वें प्रक्रम में देखो) वहां जो चाप की लम्बाई का मान होता है वहां उस चाप सम्बन्धी कोण का भी मान होता है और वह उस कोण का चापीय मान कहाता है। जो त्रिकोणमिती का गणित बीजगणित से सिद्ध करते हैं उस में कोण का चापीय मान ही लेते हैं ॥

अब जो (व) व्यासार्ध में (२ ϖव) यह पहिले सिद्ध हुआ परिधि लब्ध हो तो एक व्यासार्ध में क्या होगा इस त्रैराशिक से लब्ध हुआ इच्छाफल (२ ϖ) यह एक व्यासार्ध में परिधि की लम्बाई होती है ॥

इस लिये ϖ = ३. १४१५९२६५ इत्यादि एक व्यासार्ध में अर्धपरिधि का मान दो समकोण का चापीय मान होता है ॥

और जिस कोण का चापीय मान एक हो उस कोण का $\frac{१८०^\circ}{३.१४१५९ इ.}$ = ५७°. २९५७ इ० = ५७° । १७′ । ४४″ . ६ इत्यादि अंशादि मान होता है। और इस निर्दिष्ट कोण के अंशादि मान पर से उस कोण सम्बन्धी चाप की लंबाई जानना सुलभ है ॥

॥ अध्याय ४ ॥

इस अध्याय में त्रिभुज का गणित और वंश आदिओं की लम्बाई और ऊंचाई जानने के उदाहरण लिखे हैं ॥

॥ त्रिभुजगणित ॥

५१ त्रिभुज के अवयवों में से कोई तीन अवयव ज्ञात हों तो उन पर से और अवयव को जानने के लिये जो गणित करते हैं उसे त्रिभुज गणित कहते हैं। इस में जो केवल तीन कोणही ज्ञात होवें तो उन से और अवयवों के मान नियत नहीं होते इस लिये वहां त्रिभुजगणित नहीं लगता ॥

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

॥ जात्यत्रिभुज का गणित ॥

५२ जात्यत्रिभुज में एक कोण समकोण होता है इस लिये एक अवयव तो ज्ञात ही रहता है और दो कोण को छोड़ दूसरे दो अवयवों पर से और अवयव (३४ वें प्रक्रम से ज्ञात हो सकते हैं। जैसा

पहिला प्रकार। मानों कि (अ) भुज ज्ञात है और उस के सामने का (आ) कोण ज्ञात है तब

$$\left\{\begin{array}{l} \because \text{आ} + \text{का} = \text{गा} = ९०^\circ \\ \therefore \text{का} = ९०^\circ - \text{आ यों (का) कोण ज्ञात तोता है।} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{और भी } \because \text{स्पआ} = \dfrac{\text{अ}}{\text{क}} \quad \therefore \text{क} = \dfrac{\text{अ}}{\text{स्पआ}} \\ \text{वैसा} \quad \text{ज्याआ} = \dfrac{\text{अ}}{\text{ग}} \quad \therefore \text{ग} = \dfrac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}} \end{array}\right\}$$

. यहां (स्पआ) और (ज्याआ) इन दोनों को इष्टव्यासार्ध (त्रि) सम्बन्धी करने से (क) और (ग) इन दो भुजों के मान ये सिद्ध होते हैं

$$\text{क} = \dfrac{\text{अ}}{\dfrac{\text{स्पआ}}{\text{त्रि}}} = \dfrac{\text{त्रिअ}}{\text{स्पआ}} \text{। ग} = \dfrac{\text{अ}}{\dfrac{\text{ज्याआ}}{\text{त्रि}}} = \dfrac{\text{त्रिअ}}{\text{ज्याआ}}$$

यहां त्रिज्या $१०^{१०}$ इतनी मानते हैं और उस का दशमूल घातप्रमापक १० हैं इस लिये (क) के मान का घातप्रमापक = $\text{घा}_\text{द}$* क = १० + $\text{घा}_\text{द}$ अ — $\text{घा}_\text{द}$ स्पआ।

यों (ग) के मान का घात प्रमापक रूप देने की रीति जान लो यों औ दो भुज भी ज्ञात हो सकत हैं

---

* $\text{घा}_\text{द}$ यह चिन्ह दश मूल घातप्रमापक का द्योतक है

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

उदा० अ = १२०। आ = ४५°। १४′। २३″ तो और अवयवों को कहो

यहां का = ९०° — ४५°। १४′। २३″ = ४४°। ४५′। ३७″

और $घा_{द}$ क = १० + $घा_{द}$ अ — $घा_{द}$ स्पआ

= १० + २.०७९१८१२ — १०.००३६३४२

$\begin{cases} +१२.०७९१८१२ \\ -१०.००३६३४२ \end{cases}$

= २.०७५५४७० = $घा_{द}$ ११९ ∴ क = ११९

और $घा_{द}$ ग = १० + $घा_{द}$ अ — $घा_{द}$ ज्याआ

= १० + २.०७९१८१२ — ९.८५१२९४५

= $\begin{cases} +१२.०७९१८१२ \\ -९.८५१२९४५ \end{cases}$

= २.२२७८८६७ = $घा_{द}$ १६९ ∴ ग = १६९

इस प्रकार से सब अवयव सिद्ध हुए

का = ४४°। ४५′। ३७″

क = ११९

ग = १६९

दूसरा प्रकार। मानों कि (अ) भुज और उससे लगा हुआ (का) कोण निर्दिष्ट है तो यहां आ = ९०° — का ॥

$स्पका = \frac{क}{ग}$ ∴ क = अ स्प का

$कोज्या\ का = \frac{अ}{ग}$ ∴ $ग = \frac{अ}{कोज्या\ का}$

अब (क) और (ग) इन दोनों को घातप्रमापक रूप देने से

$घा_{द}$ क = $घा_{द}$ अ + $घा_{द}$ स्प का — १०

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

घा$_{\text{द}}$ ग = १० + घा$_{\text{द}}$ अ — घा$_{\text{द}}$ कोज्या का

यों और अवयव प्रकाशित होते हैं

उदा० अ = १२० । और का = ४४ । ४° ५′ । ३७″ तो यहां और अवयव क्या होंगे ॥

यहां आ = ९०° — ४४° । ४५′ । ३७″ = ४५° । १४′ । २३″

और घा$_{\text{द}}$ क = घा$_{\text{द}}$ अ + घा$_{\text{द}}$ स्पका — १०

= २.०७९१८१२ + ९.९९६३६५८ — १०

$$= \left\{ \begin{array}{l} +\text{२.०७९१८१२} \\ +\text{९.७७६३६५८} \\ -\text{१०} \end{array} \right.$$

= २.०७५५४७० = घा$_{\text{द}}$ ११९ ∴ क = ११९

और घा$_{\text{द}}$ ग = १० + घा$_{\text{द}}$ अ — घा$_{\text{द}}$ कोज्या का

= १० + २.०७९१८१२ — ९.८५१२९४५

$$= \left\{ \begin{array}{l} +\text{१२.०७९१८१२} \\ -\text{९.८५१२९४५} \end{array} \right.$$

= २.२२७८८६७ = घा$_{\text{द}}$ १६९ ∴ ग = १६९

इस प्रकार से अव्यक्त अवयव सिद्ध हुए

आ = ४° । १४′ । २३″

क = ११९

ग = १६९

तीसरा प्रकार । मानों कि (ग) भुज और उससे लगा हुआ (आ) कोण निर्दिष्ट है तो यहां का = ९०° — आ ॥

और ज्याआ = $\frac{\text{अ}}{\text{ग}}$ ∴ अ = ग . ज्याआ

CC-0. In Public Domain. Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$$\text{कोज्याअ} = \frac{\text{क}}{\text{ग}} \therefore \text{क} = \text{ग} \cdot \text{ज्याअ}$$

इन दोनों को घातप्रमापक रूप देने से

$\text{घा}_{\text{द}}\,\text{अ} = {}_{\text{द}}\,\text{ग} + \text{घा}_{\text{द}}\,\text{ज्याअ} - १०$

$\text{घा}_{\text{द}}\,\text{क} = \text{घा}_{\text{द}}\,\text{ग} + \text{घा}_{\text{द}}\,\text{कोज्याअ} - १०$

यों और अवयव व्यक्त होते हैं ॥

उदा० ग = १६९ । औ आ = ४५° । १४′ । २३″ तो यहां और अवयव क्या होंगे सो कहो ॥

यहां का = ९०° — ४५° । १४′ । २३″ = ४४° ४५′ । ४५′ । ३७″

$$\text{घा}_{\text{द}}\,\text{अ} = \text{घा}_{\text{द}}\,\text{ग} + \text{घा}_{\text{द}}\,\text{ज्याअ} - १०$$

$$= \begin{cases} +२.२२७८८६७ \\ +९.८५१२९४५ \\ -१० \end{cases}$$

$$= २.०७९१८१२ = \text{घा}_{\text{द}}\,१२० \therefore \text{अ} = १२०$$

$$\text{अब घा}_{\text{द}}\,\text{क} = \text{घा}_{\text{द}}\,\text{ग} + \text{घा}_{\text{द}}\,\text{कोज्याअ} - १०$$

$$= \begin{cases} +२.२२७८८६७ \\ +९.८४७६६०३ \\ -१० \end{cases}$$

$$= २.०७५५४७० = \text{घा}_{\text{द}}\,११९ = \text{क} = ११९$$

यों सब अवयव सिद्ध हुए

का = ४४° । २५′ ३७″

अ = १२०

क = ११९

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

चौथा प्रकार । मानों कि (अ) और (ग) ये दो भुज निर्दिष्ट हैं तो ज्याआ = $\frac{\text{अ}}{\text{ग}}$ ॥

इस का घातप्रमापक रूप

घा$_{द}$ ज्याआ = १० + घा$_{द}$ अ — घा$_{द}$ ग

इस प्रकार से (आ) कोण जाना गया ∴ का = ९०° — आ

और घा$_{द}$ क = १० + घा$_{द}$ अ — स्पआ

यों (का) कोण और (ग) भुज ये दोनों ज्ञात होते हैं

वा क^{२} = ग^{२} — अ^{२} यह क्षेत्रमिति के पहिले अध्याय की ४७ वीं प्रतिज्ञा से सिद्ध होता है इस लिये यहां कोण सम्बन्धी विधि के विन (क) भुज जाना गया ॥

उदा० अ = १२० । और ग = १५९ तो यहां और अवयव क्या होंगे ॥

यहां घा$_{द}$ ज्याआ = १० + घा$_{द}$ अ — घा$_{द}$ ग

= १० + २. ०७९१८१२ — २०२२०७८८६७

{ + १२. ०७९१८१२
{ — २. २२०७८८६७

= ९.८५१२७४५ = घा$_{द}$ ज्या ४५° । १४′ । २३″

∴ आ = ४५° । १४′ । २३″

∴ का = ९०° − ४५° । १४′ । २३″ = ४४° ४५ ३७″ ।

और घा$_{द}$ क = १० + घा$_{द}$ अ — घा$_{द}$ स्पआ

इस पर से सिद्ध हुआ (क) का मान = ११९

यों और भी अवयव सिद्ध हुए आ = ४५° । १४′ । २३″

का = ४४° । ४५′ । ३७″

क = ११९

CC-0. In Public Domain. Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

वा $क = \sqrt{ग^२ - अ^२} = \sqrt{(१६९)^२ - (१२०)^२} = ११९$ ऐसा विधि करने से वही भुज सिद्ध हुआ ॥

पांचवां प्रकार। मानों कि (अ) और (क) ये दोनों भुज जाने हुए हैं तो स्पश्चा $= \frac{अ}{क}$ ॥

वा $घा_द \, स्पश्चा = १० + घा_द \, अ - घा_द \, क$

इस प्रकार से (अ) कोण को जान के

$का = ९०° - अा$

और $घा_द \, ग = १० + घा_द \, अ - घा_द \, ज्याश्चा$

यों (का) कोण औ (ग) भुज इन दोनों को जान लेना।

वा $ग^२ = अ^२ + क^२$ यों क्षेत्रमिति के पहिले अध्याय कि (४७) वीं प्रतिज्ञा से (ग) भुज जाना जाता है।

उदा० अ = १२० और क = ११९ तो और अवयव क्या होंगे

यहां $घा_द \, स्पश्चा = १० + घा_द \, अ - घा_द \, क$

$= १० + २.०७९१८१२ - २.०७५५४७०$

$= \begin{cases} + १२.०७९१८१२ \\ - २.०७५५४७० \end{cases}$

$= १०.००३६३४२ = घा_द \, स्प ४५°।२४'।२३''$

$\therefore अा = ४५°।२४'।२३''$

और $\therefore का = ४४°।४५'।३७''$

और $घा_द \, ग = १० + घा_द \, अ - घा_द \, ज्याश्चा$ इस पर से सिद्ध हुआ

(ग) भुज का मान = ११९

वा $ग = \sqrt{(१२०)^२ + (११९)^२} = १६९$ इस प्रकार से वही भुज सिद्ध हुआ ॥

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

॥ अभ्यास के लिये और उदाहरण ॥

॥ जात्य त्रिभुज में ॥

	निर्दिष्ट अवयव		सिद्ध अवयव
(१)	अ = २१ अ = ४६°।२३'।५०"	∴	का = ४३°।३६'।१०" क = २०। ग = २९
(२)	अ = १०० आ = ४४°।१७'	∴	का = ३५°।४३' क = ७१.९०११५ ग = १२३.१६६६५
(३)	अ = १३६ का = ६३°।३१'।८"	∴	आ = २६°।२८'।५२" क = २७३। ग = ३०५
(४)	अ = १३५ का = २५°।२३'	∴	आ = ६४°।३७' क = ६४.०५५४२८ ग = १४९.४२५५७
(५)	ग = ५४७.२१ आ = ३१°।४५'।२२.४"	∴	का = ५८°।१४'।३७.६" अ = २८८ क = ४६५.२९
(६)	ग = ९२१७ अ = १°।११'।३७"	∴	का = ८८°।४८'।२३" अ = १९२। क = ९२१५
(७)	अ = ४०६० ग = ५७४१	∴	आ = ४५°।०'।२५.४" का = ४४°।५९।३४.६" क = ४०५९
(८)	क = २२४ ग = ७८२	∴	आ = ७३°।२१'।१७" का = १६°।३८'।४३" अ = ७४९.२२४२
(९)	अ = २० क = ९९	∴	आ = ११°।२५'।१६.३" का = ७८°।३४'।४३.७" ग = १०१
(१०)	अ = १६ क = ११.५२९	∴	आ = ५४°।१३'।२९.६" का = ३५°।४६'।३०.४" ग = १९.७२१

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

॥ अब अजात्य त्रिभुज का गणित दिखलाते हैं ॥

५३ अजात्य त्रिभुज अर्थात जिस में कोई समकोण नहीं है उस में तीन अवयव निर्दिष्ट हों तो और तीन अवयव ज्ञात हो सकते हैं और जो तीन से न्यून अवयव निर्दिष्ट हों वा तीनकोण हो निर्दिष्ट हों तो और अवयवों को नहीं जान सकते ॥

अजात्य त्रिभुज के अनेक प्रकार हैं उन को क्रम से लिखते हैं पहिला प्रकार । जब कि त्रिभुज में एक भुज (अ) और (आ, का) ये दोनों कोण निर्दिष्ट हैं ॥

तब ∴ आ + का + गा = १८०° ∴ गा = १८०° — (आ + का)

यों तीसरा कोण ज्ञात हुआ

और (२३ वें प्रक्रम से $\frac{\text{ज्याआ}}{\text{ज्याका}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$

$\therefore$ क = $\frac{\text{अ . ज्याका}}{\text{ज्याआ}}$ इस का घातप्रमापक रूप

घा$_{\text{द}}$ क = घा$_{\text{द}}$ अ + घा$_{\text{द}}$ ज्याका — घा$_{\text{द}}$ ज्याआ

ऐसा ही घा$_{\text{द}}$ ग = घा$_{\text{द}}$ अ + घा$_{\text{द}}$ ज्यागा — घा$_{\text{द}}$ ज्याआ

यों (क) और (ग) ये दो भुज व्यक्त होते हैं ।

उदा° (१) अ = १५ और आ = ६७° । २२' । ४८. ५"

और का = ५३° । ७' । ४८ . ४" तो यहां और अवयव क्या होते हैं सो कहो ॥

यहां गा = १८०° — (६७° । २२' । ४८ . ५" + ५३° । ७' । ४८ . ४")

= १८०° — १२०° । ३०' । ३६ . ९" = ५९° । २९' । २३ . १"

घा$_{\text{द}}$ क = घा$_{\text{द}}$ अ + घा$_{\text{द}}$ ज्याका — वा$_{\text{द}}$ ज्याआ

= १ . १७६० ९१३ + ९. ९० ३० ९०० — ९. ९६५२३०९

= { + ११.०७९१८१३
  — ९.९६५०३०९

= १. १४ ६१ २८० = घा$_{\text{द}}$ १३ ∴ ग = १३

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

ऐसा ही घा$_\text{द}$ ग = आ$_\text{द}$ अ + घा$_\text{द}$ ज्यागा — घा$_\text{द}$ ज्याआ

= १.१७६० ९११ + ९.९३ ५२ ७४ ६ — ९.९६ ५२ ३०९

= { + ११.११ १३ ६५९
  — ९.९६ ५२ ३०९

= १.१४ ६१ २८० = घा$_\text{द}$ १४ ∴ ग = १४

उदा० (२) अ = १०। का = १२६°। ५२′। ११, ६″ और गा = २५°। ३′। २७.४″ तो यहां और अवयव क्या होंगे।

यहां आ = १८०° — (१२६°। ५२′। ११.६″ + २५°। ३′। २७.४″)

= १८०° — १५१°। ५५′। ३९″ = २८°। ४′। २१″

घा$_\text{द}$ क = घा$_\text{द}$ अ + घा$_\text{द}$ ज्याका — घा$_\text{द}$ ज्याआ

= १.००००००० + ९.९०३०९०० — ९.६७२६४११

= { + १०.९०३०९००
  — ९.६७२६४११

= १.२३० ४४८९ = घा$_\text{द}$ १७ ∴ क = १७

घा$_\text{द}$ ग = घा$_\text{द}$ अ + घा$_\text{द}$ ज्यागा — घा$_\text{द}$ ज्याआ

= १.००००००० + ९.६२ ६८८३६ — ९.६७२६४११

= { + १०.६२ ६८८३६
  — ९.६७२६ ४११

= ०.९५४२४२२५ = घा$_\text{द}$ ९ ∴ ग = ९

यों अज्ञात अव- यव सिद्ध हुए { आ = २८°। ४′। २१″
क = १७ । ग = ९

दूसरा प्रकार। जब कि त्रिभुज में (अ) औ (क) ये दो भुज निर्दिष्ट

CC-0. In Public Domain. Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

हैं और इन में किसी एक अर्थात (अ) भुज के सामने का (आ) कोण निर्दिष्ट है तो (३४)वें प्रक्रम से ॥

$$\frac{ज्याआ}{ज्याका} = \frac{अ}{क}$$

$$\therefore ज्याका = \frac{क . ज्याआ}{अ}$$

और $गा = १८०^\circ - (आ + का)$ यों और दो भुजों को जान लेना।

$$आगे \because \frac{ज्याआ}{ज्यागा} = \frac{अ}{ग}$$

$$\therefore ग = \frac{अ . ज्यागा}{ज्याआ}$$

अब (का) और (ग) इन दोनों के घातप्रमापक रूप लिखते हैं।

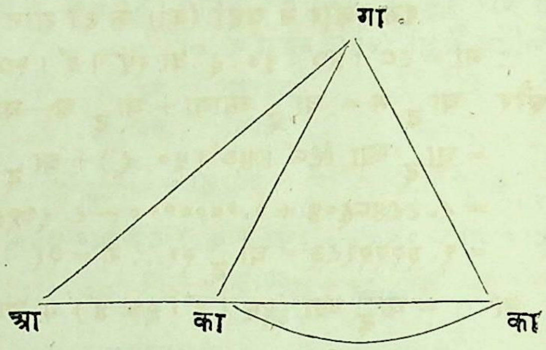
$$घा_{द}\, ज्याका = घा_{द}\, ज्याआ + घा_{द}\, क - घा_{द}\, अ$$

$$और\; घा_{द}\, ग = घा_{द}\, ज्यागा + घा_{द}\, अ - घा_{द}\, ज्याआ$$

यहां यह जानना चाहिये कि कोण और उस करके रहित दो सम-कोण की ज्या समान ही होती है इस लिये यहां (ज्याका) से लब्ध हुए (का) के मान को १८० एक सौ अस्सी में घटा देने से (का) कोण का दूसरा मान सिद्ध होता है परन्तु जो (क) भुज से (अ) भुज छोटा हो तो। और जो इससे उलटा हो तो नहीं। क्योंकि जब कि (क) भुज से (अ) भुज छोटा है तो (का) कोण से (आ) कोण छोटा होगा। और तब पहिले सिद्ध किये हुए (का) कोण के दो मानों का योग दो समकोण के समान होता है इस लिये उन दो मानों में हर एक में (का) कोण से छोटे (आ) कोण को जोड़ दें तो वह योग दो सम कोण से न्यून होगा इस लिये यहां (का) कोण के दो मानों का संभव है। परन्तु जब (क) भुज से (अ) भुज बड़ा हो तब (का) कोण से (आ) कोण बड़ा होगा इस लिये उससे जुड़े हुए (का) कोण का दूसरा मान दो सम कोण से अधिक होगा इस लिये यहां दूसरे मान का संभव नहीं है, ॥

यह समीप लिखे हुए क्षेत्र से अच्छी भांति बूझ पड़ता है, मानों कि (आकागा) एक त्रिभुज है उस में (आगा) भुज से (कागा) भुज छोटा है ॥

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha



तो (गा) केन्द्र मान के (गाका) व्यासार्ध से (काका) चाप करनें से वह (आका) रेखा पर (आ) बिन्दु से (का) की ओर दूसरे स्थान में लगता है। उसमें निर्दिष्ट अवयव वाले दो त्रिभुज बनते हैं उन में (का) कोण के दो मान आपस में स्पर्धी स्पष्ट देख पड़ते हैं ॥

और जो (आगा) भुज से (कागा) भुज बड़ा हो तो (आ) बिन्दु से जिधर की ओर (का) बिन्दु हो उस को दूसरी ओर (काका) चाप और (आका) रेखा का संपात होगा ॥

इस से तो दूसरा त्रिभुज हो न बनेगा तब (का) कोण के दूसरे मान का भी असंभव ही है ॥

और भी जो (काका) चाप (आका) रेखा में केवल स्पर्श करे तो यद्यपि (आगा) भुज से (कागा) भुज छोटा रहे तौ भी (का) कोण एक ही प्रकार का होगा। और जो (काका) चाप (आका) रेखा में न लगे वा न काटे तो (आकागा) त्रिभुज न बनने के कारण कहे हुए निर्दिष्ट अवयव अशुद्ध जानो।

उदा॰ अ = १० और क = १७ और आ = २८°। ४′। २१″ तो और अवयव क्या होंगे

यहां घा$_{द}$ ज्याका = घा$_{द}$ ज्याआ + घा$_{द}$ क — घा$_{द}$ अ

= ९.६७ २६४११ + १.२३०४४८९ — १.००००००००

= ९.९० ३० ९०० = घा$_{द}$ ज्या ५३°। ७′। ४८.४″

वा = घा$_{द}$ ज्या १२६°। ५२′। ६″

यहां (क) भुज से (अ) भुज छोटा है ॥

इस लिये का = ५३°। ७′। ४८.४″ वा १२६°। ५२′। ११.६

इस प्रकार से यहां (का) के दो मान आते हैं

$\therefore$ गा = ८८° । ४७′ । ५० . ६″ वा २५° । ३′ । २७. ४″

और घा$_{द}$ ग = घा$_{द}$ ज्यागा + घा$_{द}$ अ—घा$_{द}$ ज्याआ

= घा$_{द}$ ज्या (८८° । ४७′ । ५० . ६″) + घा$_{द}$ अ—घा$_{द}$ ज्याआ

= ९. ९९९८६०४ + १.००००००० —९. ६७२६४११

= १. ३२२२१९३ = घा$_{द}$ २१ $\therefore$ ग = २१

वा = घा$_{द}$ ज्या (२५° । ३′ । २७. ४″) + घा$_{द}$ अ— घा$_{द}$ ज्याआ

= ९. ६२६८८३६ + १. ०००००००—९. ६७२६४११

= ०. ९५४२४२५ = घा$_{द}$ ९ $\therefore$ ग = ९

यों अवयव प्रकट हुए { का = ५३° । ७′ । ४८. ४″ वा १२६° । ५२′ । ११.६″
गा = ८८° । ४७′ । ५०. ६″ वा २५° । ३′ । २७.४″
ग = २१ वा ९

उदा० (२) अ = १५ । और क = १३ । आ = ६७° । २२′ । ४८. ५″
तो और अवयव क्या होंगे

यहां घा$_{द}$ ज्याका = घा$_{द}$ ज्याआ + घा$_{द}$ क—घा$_{द}$ अ

= ९ . ९६५२३७८ + १ . ११३९४३४—१.१७६०९१३

= ९ . ९०३०९०० = घा$_{द}$ ज्या ५३° । ७′ । ४८. ४″

$\therefore$ का = ५३° । ७ । ४८. ४″

यहां (क) भुज से (अ) भुज बड़ा है इस लिये यहां (का) का मान एक ही होता है ॥

$\therefore$ गा = ५९° । २९′ । २३ . १″

और पहिले की नाईं ग = १४

(३) तीसरा प्रकार । जब कि त्रिभुज में (क) औ (ग) ये दो भुज निर्दिष्ट हैं और उनका अन्तर्गत कोण (आ) निर्दिष्ट है तो अज्ञात अवयव क्या होंगे ।

तो (३३) वें प्रक्रम से $\frac{\text{क} + \text{ग}}{\text{क} - \text{ग}} = \frac{\text{स्प}\ \frac{१}{२}\ (\text{का} + \text{गा})}{\text{स्प}\ \frac{१}{२}\ (\text{का} - \text{गा})}$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$$\therefore \text{स्प}\ \frac{१}{२}(\text{का}-\text{गा}) = \frac{\text{क}-\text{ग}}{\text{क}+\text{ग}}\text{स्प}\ \frac{१}{२}(\text{का}+\text{गा})$$

$$\text{परन्तु}\ \frac{१}{२}(\text{का}+\text{गा}) = ९०^{\circ} - \frac{१}{२}\text{श्रा}$$

$$\therefore \text{स्प}\ \frac{१}{२}(\text{का}-\text{गा}) = \frac{\text{क}-\text{ग}}{\text{क}+\text{ग}} \cdot \text{कोस्प}\ \frac{१}{२}\text{श्रा}$$

इस का घातप्रमापक रूप लिखते हैं

$$\text{घा}_{\text{द}}\ \text{स्प}\ \frac{१}{२}(\text{का}-\text{गा}) = \text{घा}_{\text{द}}\ \text{कोस्प}\ \frac{१}{२}\text{श्रा} + \text{घा}_{\text{द}}(\text{क}-\text{ग}) - \text{घा}_{\text{द}}(\text{क}+\text{ग})$$

यों अज्ञात दो कोणों के अन्तर का आधा जान पड़ता है और उन दोनों के योग का आधा तो निर्दिष्ट कोण से जाना ही गया है ॥

$$\therefore \text{का} = \frac{१}{२}(\text{का}+\text{गा}) + \frac{१}{२}(\text{का}-\text{गा})$$

$$\text{और गा} = \frac{१}{२}(\text{का}+\text{गा}) - \frac{१}{२}(\text{का}-\text{गा})$$

यों और दो कोण जान पड़ेंगे

अब पहिले प्रकार से तीसरे भुज को जानना सुलभ है

अब यहां जो निर्दिष्ट तीन अवयवों से और कोणों को छोड़ तीसरे भुज को जानने चाहें तो वह $\text{श्र}^{२} = \text{क}^{२} + \text{ग}^{२} - २\,\text{कग} \cdot \text{कोज्याश्रा}$

यह (२५)वें प्रक्रम में लिखे हुए समीकरण से सिद्ध होता है। परन्तु इस समीकरण का घातप्रमापक रूप नहीं सिद्ध होता है इस लिये इस में ऐसा एक सम्बन्ध लगाते हैं कि जिस में इससे घातप्रमापक के द्वारा तीसरे भुज को जान सकें वह सम्बन्ध दो प्रकार का है ॥

उन दोनों में पहिला दिखलाते हैं

$$(\text{प}_{१})\quad \text{श्र}^{२} = \text{क}^{२} + \text{ग}^{२} - २\,\text{कग} \cdot \text{कोज्याश्रा}$$

$$= \text{क}^{२} - २\,\text{कग} + \text{ग}^{२} + २\,\text{कग}\,(१ - \text{कोज्याश्रा})$$

$$= (\text{क}-\text{ग})^{२} + ४\,\text{कग} \cdot \text{ज्या}^{२}\,\frac{१}{२}\text{श्रा}$$

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$$= (क — ग)^२ \left\{ १ + \frac{४ कग}{(क — ग)^२} . ज्या^२ \frac{१}{२} अा \right\}$$

यहां $\frac{४ कग}{(क — ग)^२} . ज्या^२ \frac{१}{२}$ अा धन है इस लिये उस के स्थान में

$(स्प^२ इ)$ मान लेते हैं तो

$$अ^२ = (क — ग)^२ (१ + स्प^२इ) = (क — ग)^२ छेद^२ इ$$

$$\therefore अ = (क — ग) छेद इ$$

इस का घातप्रमापक रूप

$$घा_द अ = घा_द (क — ग) + घा_द छेद इ — १०$$

$$और \because स्प^२ इ = \frac{४ कग}{(क — ग)^२} . ज्या^२ \frac{१}{२} अा$$

$$\therefore स्पइ = \frac{२\sqrt{कग}}{क — ग} . ज्या \frac{१}{२} अा$$

इस का घातप्रमापक रूप

$$घा_द स्पइ = घा_द २ + \frac{१}{२} घा_द क + घा_द ग + घा_द ज्या \frac{१}{२} अा — घा_द (क — ग)$$

यों (इ) का मान जाना गया

$$अब घा_द अ = घा_द (क — ग) + घा_द छेद इ — १०$$

इस संबंध में जो (क — ग) छोटा हो तो (स्पइ) बड़ा होगा और उससे लब्ध हुआ (इ) का जो मान है सो स्थूल होता है और (क) का मान भी स्थूल होता है इस लिये दूसरा संबंध दिखलाते हैं ॥

$$(प_२)\ अ^२ = क^२ + ग^२ — २ कग . कोज्याअा$$

$$= क^२ + २ कग + ग^२ — २ कग (१ + कोज्याअा)$$

$$= (क + ग)^२ — ४ कग . कोज्या^२ \frac{१}{२} अा$$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$$= (क + ग)^{२} \left\{ १ - \frac{४ कग}{(क + ग)^{२}} कोज्या^{२} \frac{१}{२} श्रा \right\}$$

अब जिस लिये $(क + ग)^{२}$ इससे ४ कग सर्वदा छोटा रहता है इस लिये ॥

$\left(\frac{४ कग}{(क + ग)^{२}} कोज्या \frac{१}{२} श्रा \right)$ यह १ एक से छोटा है

$$\therefore \text{ मानों कि } \frac{४ कग}{(क + ग)^{२}} कोज्या^{२} \frac{१}{२} श्रा = ज्या^{२}इ$$

$$तो\ श्र^{२} (क + ग)^{२} (१ - ज्या^{२} इ) = (क + ग)^{२} कोज्या^{२} इ$$

$$\therefore \quad श्र = (क + ग) \text{ कोज्या}इ$$

अब (ज्याइ) और (श्र) इन के दो मानों के घातप्रमापक रूप लिखते हैं

$घा_{द}$ ज्याइ $= घा_{द}\ २ + \frac{१}{२} घा_{द}\ क + \frac{१}{२} घा_{द}\ ग + घा_{द}$ कोज्या $\frac{१}{२}$ श्रा $- घा_{द} (क + ग)$

$$घा_{द}\ श्र = घा_{द} (क + ग) + घा_{द}\ \text{कोज्या}इ - १०$$

उदा० क = ८२। ग = २१ और श्रा = १०२°। ४०। ४८.४ तो यहां अज्ञात अवयव क्या होंगे

यहां $घा_{द}$ स्प $\frac{१}{२}$(का—गा) $= घा_{द}$ कोस्प $\frac{१}{२}$ श्रा $+ घा_{द} (क - ग) - घा_{द} (क + ग)$ ॥

$= घा_{द}$ कोस्प (५१°। २०'। २४०) $+ घा_{द}\ ६१\ घा_{द}\ १०३$

$= ९.९० ३० ९०० + १.७८ ५३ २९८ - २ . ० १२८३ ७२$

$$= \left\{ \begin{array}{l} + ११ . ६८८४१९८ \\ - २ . ०१२८३७२ \end{array} \right.$$

$= + ९ . ६७५५८२६ =$ स्प २५०। ११०। २.५०

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$\therefore \frac{१}{२}$ (का—गा) = २५° । २१′ । ३.५″

और भी $\frac{१}{२}$ (का + गा) = ९० — $\frac{१}{२}$ आ = ३८° । ३९′ । ३५.३″

∴ का = ६४° । ०′ । ३८.८″

और गा = १३° । १८′ । ३१.८″

इस लिये पहिले प्रकार से तीसरा भुज सिद्ध हुआ अ = ८९

अब पहिले सम्बन्ध से तीसरे भुज को जानने के लिये न्यास

$\text{घा}_{\text{द}}$ स्पइ $\text{घा}_{\text{द}}$ २ + $\frac{१}{२}$ $\text{घा}_{\text{द}}$ क + $\frac{१}{२}$ $\text{घा}_{\text{द}}$ ग + $\frac{१}{२}$ $\text{घा}_{\text{द}}$ ज्या $\frac{१}{२}$ आ — $\text{घा}_{\text{द}}$ (क — ग)

=. ३०१०३०० +. ६६११०९६५ +. ९५६९०६९५ + ९. ८९२५७८१
— १. ७८५३२९८

= ११. ८११६ २४७ — १. ७८५३ २९८ = १०. ० २६२९ ४९

= स्प । ४६° । ४४′ । ४७″ ∴ इ = ४६° । ४४′ । ४७″

और $\text{घा}_{\text{द}}$ अ = $\text{घा}_{\text{द}}$ (क — ग) × $\text{घा}_{\text{द}}$ केइ — १०

= १. ७८५३२९८ + १०. १६४०६०२ — १०

= १. ९४९३९०० = $\text{घा}_{\text{द}}$ ८९ ∴ अ = ८९

जो तीसरा भुज पहिले सिद्ध हुआ था वही अब सिद्ध हुआ ॥

यों दूसरे संबंध से भी वही भुज सिद्ध होता है

चौथा प्रकार । जब कि त्रिभुज के अ क और ग ये तीन भुज निर्दिष्ट हैं तब एक (आ) कोण का मान नीचे लिखे हुए समीकरणों में से किसी एक से जान पड़ता है ॥

जैसा ज्याआ = $\frac{२}{\text{कग}}$ = $\sqrt{\text{स (स—अ) (स—क) (स—ग)}}$ (१)

ज्या $\frac{१}{२}$ आ = $\sqrt{\frac{\text{(स—क) (स—ग)}}{\text{कग}}}$ (२)

कोज्या $\frac{१}{२}$ आ = $\sqrt{\frac{\text{स (स—अ)}}{\text{कग}}}$ (३)

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$$स्प \frac{१}{२} अ = \sqrt{\frac{(स-क)(स-ग)}{स(स-क)}} \qquad (४)$$

यहां पहिले समीकरण की उपपत्ति (३६)वें प्रक्रम में देख लेना और दूसरी इत्यादि की (३०)वें प्रक्रम में देखना ॥

और जब (अ) कोण समकोण के निकट न हो तब पहिले समीकरण से उस का आनयन कर सकते हैं जिस लिये कि समकोण के आसन्न कोण की ज्या का चाप सारणी से सूक्ष्म नहीं मिलता है ॥

और जब कि (अ) कोण समकोण के आसन्न न हो तब दूसरी और तीसरी इन दो समीकरणों से हर एक का आनयन कर सकते हैं ॥

और जब (अ) कोण दो समकोण के निकट न हो तब चौथे समीकरण से उस का आनयन कर सकते हैं ॥

अब इन समीकरणों के क्रम से घातप्रलापक रूप लिखते हैं ॥

$$(१)\ घा_{द}\ ज्याअ = १० + घा_{द}\ २ + \frac{१}{२}\left\{घा_{द}\ स + घा_{द}(स-अ) + घा_{द}(स-क) + घा_{द}(स-ग)\right\} - (घा_{द}\ क + घा_{द}\ ग)$$

$$(२)\ घा_{द}\ ज्या \frac{१}{२} अ = \frac{१}{२}\left\{२० + घा_{द}(स-क) + घा_{द}(स-ग) - (घा_{द}\ क + घा_{द}\ ग)\right\}$$

$$(३)\ घा_{द}\ कोज्या \frac{१}{२} अ = \frac{१}{२}\left\{२०\ घा_{द}\ स + घा_{द}(स-अ) - (घा_{द}\ क + घा_{द}\ ग)\right\}$$

$$(४)\ घा_{द}\ स्प \frac{१}{२} अ = \frac{१}{२}\left\{२० + घा_{द}(स-क) + घा_{द}(स-ग) - घा_{द}\ स - घा_{द}(स-अ)\right\}$$

साजात्य से (क) औ (ग) इन दो कोणों के भी मान जान पड़ेंगे ॥

उदा० जिस त्रिभुज में अ = २५ । क = १७ और ग = २८ वहां तीन कोणों के मान क्या होंगे ॥

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

यहां पहिले समीकरण से प्रश्नोत्तर जानने के लिये न्यास

$$स = \frac{१}{२} (२५ + १७ + २८) = ३५$$

$$\therefore\ स — अ = १०$$
$$स — क = १८$$
$$स — ग = ७$$

और भी

$$घा_{द}\ ज्याआ = १० + घा_{द}\ २ + \frac{१}{२} \left\{ घा_{द}\ स + घा_{द}\ (स — अ) + घा_{द}\ (स — क) + घा_{द}\ (स — ग) — (घा_{द}\ क + घा_{द}\ ग) \right\}$$

$$= १० + .३०१०३०० + \frac{१}{२} \left\{ १.५४४०६८० + १.००००००० + १.२५५२७२५ + .८४५०९८० \right\} — (१.२३०४४८८ + १.४४७१५८०)$$

$$= १०.३०१०३०० + २.३२२२१९३ — २.६७७६०६८$$

$$= ९.९४५६४२४ = घा_{द}\ ज्या\ (६१^{\circ}\ ।\ ५५'\ ।\ ३९'')$$

$$\therefore\ आ = ६१^{\circ}\ ।\ ५५'\ ।\ ३९''$$

तब पहिले प्रकार से सिद्ध ऊआ का $= २६^{\circ}\ ।\ ५२'\ ।\ ११.६५''$

$$\therefore\ गा = ८१^{\circ}\ ।\ १२'\ ।\ ९.३५''$$

॥ अभ्यास के लिये और उदाहरण ॥

	निर्दिष्ट अवयव		सिद्ध अवयव
(१)	अ = ५०० आ = ८५° । ४७′ का = ५७° । २५′	....	गा = ३६° । ४८′ क = ४२२ . ४४८१ ग = ३०० . ३२४७
(२)	अ = ३२७ का = २६° । ८′ । ५५″ गा = २३° । ३२′ ५″	....	आ = १३०° । १९′ क = १२९ ग = १७१ . २४७२

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

निर्दिष्ट अवयव		सिद्ध अवयव
(३) अ = ८५ क = १०० आ = ३०° । २९′		का = ४५° । ४३′ । ६·६″ वा = १३४° । १६′ । ५३·४″ गा = ९६° । ४७′ । ५३·४″ वा = ८° । १४′ । ६·६″ ग = १३८·६९८७ वा = २०·००७३६
(४) अ = ८५ क = २०२ आ = ११° । २५′ । १६″	·· ··	का = २८° । ४′ । २१″ वा = १५१° । ५५′ । ३९″ गा = १४०° । ३०′ । २३″ वा = १६° । ३९′ । ५″ ग = २७३ वा = ११२
अ = ८९ क = ६५ आ = ३६ । ५२′ । ११·६″	·· ··	का = २५° । ५९′ । २१·२५″ गा = ११७° । ८′ । २७·१७″ ग = १३२
क = १२५ ग = १५० आ = ३०	·· ··	का = ५५° । १०′ । २″ गा = ९४° । ४९′ । ५८″ अ = ७८·१४३
(७) अ = १३ क = २० गा = ७५° । ′	·· ··	आ = ३९° । ५७′ । १२″ का = ६७° । २२′ ४८″ ग = २१
(८) अ = १०० क = १०१ ग = १०२	·· ··	आ = ५९° । १′ । २०″ का = ५९° । ५९′ । २५″ गा = ६०° । ५८′ । १५″
(९) अ = ३७ क = १५ ग = ४४	·· ··	आ = ५३° । ७′ । ४८·३″ का = १८° । ५५′ । २८·७″ गा = १०७° । ५६′ । ४३″

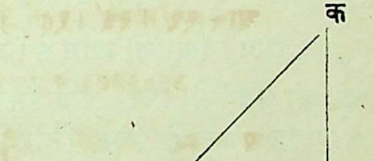
CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

निर्दिष्ट अवयव		सिद्ध अवयव
(१०) अ = ३४ २० २०१ क = ८६६० २५४ ग = ९८ ४८०७८	....	आ = २०° का = ६०° गा = १००°

(५४) अजात्य त्रिभुज के अज्ञात अवयवों को जात्य त्रिभुज के गणित से भी जान सकते हैं । केवल उस में किसी कोण से उस के सामने के भुज पर लंब गिरा के दो जात्य त्रिभुज वनाना । इतनी विशेष क्रिया करनी पड़ती है ॥

(५५) अब त्रिकोणमिति से जिस भांति वंश घर और पहाड़ इत्यादि की उंचाई और उनका औ अपना बीच जान पड़े सो प्रकार कहते हैं । इस लिये पहिले किसी समान स्थल की लंबाई तो रस्सी से वा सीधी लकड़ी से नाप लेते हैं और कोणों को तुरीय और षष्ठांश इत्यादि यंत्रों से नाप लेते हैं ॥

उदा० (१) जो किसी (अक) सीधे वांस की उंचाई जानना हो तो (अ) स्थान से समान भूमि पर एक सीधी लाठी से (अग) रेखा नाप के फिर (ग) स्थान से (क) वांस के अग्र की उंचाई तुरीय वा षष्ठांश से वेध करो तब जो (अग) लंबाई (अ) मानो और (क) की उंचाई (क°) मानो और (गगा) वेध करने वाले की आंख की उंचाई (ग) मानो ॥ तो



(प्र, ४७ वें में प्रकार २ से) आक = आगा . स्पआगाक

= अग . स्पआगाक

= अ . स्पक

∴ (अक) उंचाई = अ . स्पक + ग

इस प्रकार से उंचाई जानी जाती है ॥

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

यों जो वस्तु दृष्टि के समसूत्र से ऊंची हो उस की गणित से सिद्ध हुई उंचाई में दृष्टि की उंचाई जोड़ देने से वास्तव उंचाई होती है। और दृष्टि के समसूत्र से जो वस्तु नीची है उस की गणित से सिद्ध हुई उंचाई में दृष्टि की उंचाई घटा देने से वास्तव होती है यह भी जानो ॥

अब जो यहां अ = २५ हाथ हो और क° = ३०। और ग = ३ $\frac{१}{२}$ हाथ

हो तो आक = २५ . स्प ३०°

वा $\text{घा}_\text{द}$ आक = $\text{घा}_\text{द}$ २५ + $\text{घा}_\text{द}$ स्प ३०° — १०

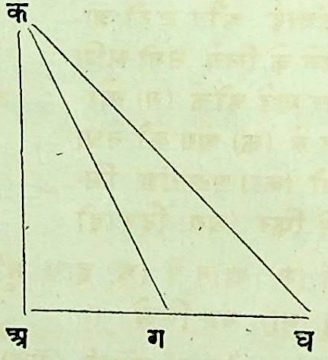
= १ . ३९७९ ४०० + ९,७६१४३९४ — १

= १ . १५९३७९४ = $\text{घा}_\text{द}$ १४ . ४३३७६

∴ बांस की उंचाई = १४ . ४३३७६ + १७ . ९३३७६ हाथ

उदा० (२) समान भूमि पर कोई एक मंदिर है उसकी ऊंचाई (अक) और दूरी (अग) जानना है ॥

अब मानों कि (ग) स्थान से (क) अग्र को वेधने से (आ) अंश मिले और (अ) मूल से जिस दिशा में (ग) स्थान है उसी दिशा में (ग) स्थान से (घ) स्थान तक (अ) हाथ भूमि पर जाके (घ) स्थान से फिर (क) अग्र को वेधने से (का) अंश मिले ॥



अब जो उंचाई (अक) = य और दूरी (अग) = र

तो (३३वें प्रक्रम से) $\frac{\text{कग}}{\text{गघ}} = \frac{\text{ज्याकघग}}{\text{ज्यागकघ}} = \frac{\text{ज्याका}}{\text{ज्या(आ—का)}}$

$$\therefore \text{कग} = \frac{\text{अ . ज्याका}}{\text{ज्या(आ—का)}}$$

$$\therefore \text{य} = \text{कग . ज्याआ} = \frac{\text{अ . ज्याआ . ज्याका}}{\text{ज्या (आ—का)}}$$

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

और $र = कग \cdot कोज्या आ = \frac{अ \cdot कोज्याआ \cdot ज्याका}{ज्या (आ - का)}$

इन दोनों के क्रम से घातप्रमापक रूप क्रम से नीचे लिखे हैं ॥

$घा_द य = घा_द अ + घा_द ज्याआ + घा_द ज्याका - घा_द ज्या(आ-का) - १०$

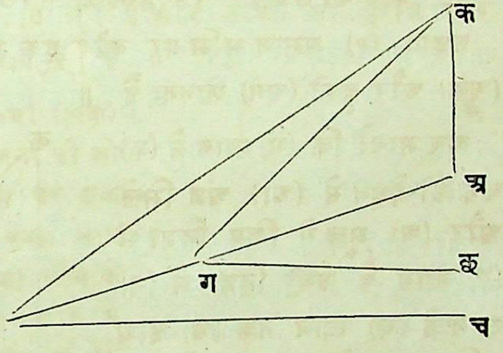
$घा_द र = घा_द अ + घा_द कोज्याआ + घा_द ज्याका - घा_द ज्या (आ-का) - १०$

जो यहां अ = ५० । आ = ३०° । २५′ । और का = १९° । ३५′

तो उत्थापन से उंचाई का मान य = ४५ . १४२ हाथ है

और वैसा ही (ग) स्थान से दूरी र = ७६ . ८९३ हाथ है

उदा० (३) किसी (अगच) क्रम से उतरती भूमि का समान भूमि पर झोंक (आ) अंश है और (अघ) भूमि पर (अक) घर आदि की उंचाई और दूरी जानने के लिये उसी भूमि पर खड़े होके (ग) स्थान से (क) अग्र को वेधा तो (का) उन्नतांश मिले फिर (अग) दिशाही में (ग) स्थान से (अ) हाथ भूमि पर जाके और (क) अग्र को वेधने से (गा) अंश मिले ॥



अब जो यहां उंचाई (अक) = य और दूरी (अग) = र तो

$$य = \frac{कग \cdot ज्याअगक}{ज्या (अगघ)} = \frac{कग \cdot ज्या (का - आ)}{कोज्याआ}$$

$$परन्तु\ कग = \frac{गघ \cdot ज्याकघग}{ज्या(गकघ)} = \frac{अ \cdot ज्या (गा - आ)}{कोज्याआ \cdot ज्या(का - गा)}$$

$$\therefore\ य = \frac{अ \cdot ज्या (का - आ) \cdot ज्या (गा - आ)}{कोज्याआ \cdot ज्या (का - गा)}$$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

ऐसा ही $र = \frac{कग \cdot ज्याअकग}{ज्याकअग} = \frac{अ \cdot ज्या (गा - आ) \cdot कोज्याका}{ज्या (का - गा) \cdot कोज्याआ}$

इन दोनों के क्रम से घातप्रमापक रूप ये हैं ।

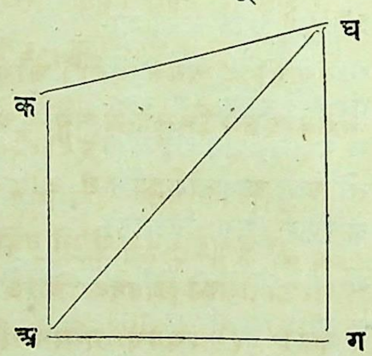
$घा_{द} य = घा_{द} अ + घा_{द} ज्या (गा - आ) + घा_{द} कोज्याका$
$- घा_{द} कोज्याआ - घा_{द} ज्या (का - गा)$

$घा_{द} र = घा_{द} अ + घा_{द} ज्या (गा - आ) + घा_{द} कोज्याका$
$- घा_{द} ज्या (का - गा) - घा_{द} कोज्याआ$

अब जो यहां अ = ५० हाथ। आ = ३०° का = ६२° । ३०′ और गा = ५०° । १५′ तो उत्थापन से सिद्ध हुआ उंचाई का मान य = ५०.६०२

ऐसा ही (ग) दूरी का मान र = ४२.४८८

उदा० (४) समान भूमि पर एक छोटा पहाड़ है और उस की उंचाई ज्ञात है उस पर खड़ा होके भूमि पर एक निर्दिष्ट सीधे वांस के अग्र और मूल इन दोनो में हर एक के दृष्टि के समसूत्र से नीचे के अंशों को वेध करके उस बांस की उंचाई जानना है ॥



जो यहां (गघ) पहाड़ की उंचाई = अ और (घ) स्थान से (अक) वांस के मूल और अग्र को वेध करने से लब्ध हुए क्रम से नीचे की ओर (आ) और (का) और (अक) वांस की उंचाई = य ॥

तब $\frac{अघ}{गघ} = \frac{१}{ज्याघअग} = \frac{१}{ज्याआ} = \therefore अघ = \frac{अ}{ज्याआ}$

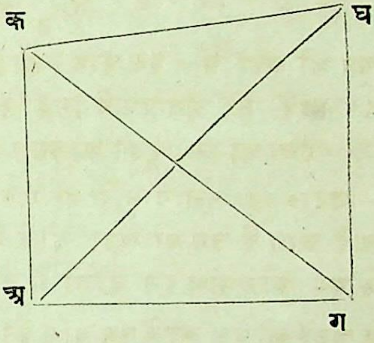
और भी $\frac{अक}{अघ} = \frac{ज्याअघक}{ज्याअकघ} = \frac{ज्या (आ - का)}{कोज्याका}$

$\therefore य = \frac{अ \cdot ज्या (आ - का)}{ज्याआ \cdot कोज्याका}$

इस में घातप्रमापक रूप देना बहुत ही सुलभ है ॥

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

उदा० (५) समान भूमि पर एक छोटा पहाड़ है उसकी ऊंचाई जानने के लिये उस पहाड़ के शिखर पर चढ़के समान भूमि पर जिन दो पेड़ों के मूलों का अन्तर निर्दिष्ट है उनके मूलों के हर एक के नीचे की ओर के अंशों के मान और पेड़ के मूल तक जो देखने हारे के दो दृष्टि सूत्र पड़ेंगे उन दोनों के बीच का कोण जानके उस पहाड़ की ऊंचाई किस रीति से जान पड़ेगी यह प्रश्न है ॥



जैसा मानों कि (अ) औ (क) ये क दोनों क्रम से पेड़ों के मूल हैं उन का बीच अक = अ और (गघ) पहाड़ के (घ) शिखर पर चढ़के (अ) और (क) मूलों को वेध करने से मिले क्रम से दृष्टि सूत्र के नीचे की ओर के अंशों के मान (आ) औ (का) ॥

वैसाही ∠ अघक = गा । और (गघ) पहाड़ की ऊंचाई = य।

तब अकघ त्रिभुज में अघ = य . कोछेआ और कघ = य . कोछेका

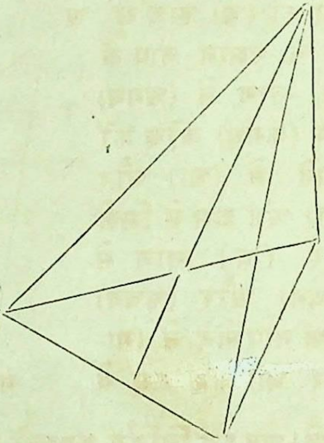
$$\therefore \text{अ}^2 = \text{य}^2\cdot \text{कोछे}^2\text{आ} + \text{य}^2\cdot \text{कोछे}^2\text{का} - 2\,\text{य}^2\cdot \text{कोछेआ}.\text{कोछेका}\,\text{कोज्यागा}$$

$$\therefore \text{य} = \frac{\text{अ}}{\sqrt{\text{कोछे}^2\text{आ} + \text{कोछे}^2\text{का} - 2\,\text{कोछेआ}\,\text{कोछेका}.\text{कोज्यागा}}} \;॥$$

उदा० (६) (अगच) समानभूमि पर बांस पेड़ इत्यादि के (क) अग्र

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

पर गच रेखा के ग। घ और च स्थानों पर खड़ा होके वेध किया तो क्रम से आ। का और गा अंश मिले यों (गघ) और (घच) रेखा को नापने से (अ) और (क) हाथ मिले अब इन निर्दिष्ट अवयवों पर से (अक) बांस आदि की ऊंचाई जानना है ॥



तब मानों कि (अक) ऊंचाई = य ∴ अघ = य. कोस्प आ और अघ = य. कोस्प का ऐसा ही अच = य. कोस्पगा ॥

$$\text{और कोज्याअघग} = \frac{\text{अघ}^२ + \text{गघ}^२ - \text{अग}^२}{२\ \text{अघ} \cdot \text{गघ}}$$

$$\text{कोज्याअघच} = \frac{\text{अघ}^२ + \text{घच}^२ - \text{अच}^२}{२\ \text{अघ} \cdot \text{घच}}$$

परन्तु कोज्या अघग = — कोज्या अघच

$$\therefore \frac{\text{अघ}^२ + \text{गघ}^२ - \text{अग}^२}{२\ \text{अघ} \cdot \text{गघ}} = \frac{\text{अच}^२ - \text{अघ}^२ - \text{घच}^२}{२\ \text{अघ} \cdot \text{घच}}$$

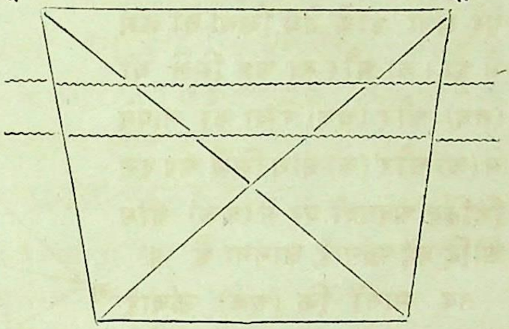
अब यहां के पदों को पहिले सिद्ध किये हुए समीकरणों से उत्थापन करके समीकरण विधी से ऊंचाई का मान लब्ध हुआ

$$\text{य} = \sqrt{\frac{\text{अक}\ (\text{अ} + \text{क})}{\text{अ}.\ \text{कोस्प}^२\text{गा} - (\text{अ} + \text{क})\ \text{कोस्प}^२\text{का} + \text{क}.\ \text{कोस्प}^२\text{आ}}}$$

उदा० (७) नदी के पार एक दुर्गम स्थान में (अ) और (क) ये दो पेड़ हैं उन दोनों को मध्य भूमि जानने के लिये इस तीर पर उसी

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

के समान भूमि पर (गघ) रेखा को (अ) हाथ भूमि के समान नाप के (ग) स्थान से (अगघ) और (कगघ) कोण को नापने से (आ) और (का) अंश क्रम से मिले फिर (घ) स्थान से (कघग) और (अघग) कोण नाप लेने से (गा- और घा) अंश क्रम से



मिले। अब इन निर्दिष्ट अवयवों पर से (अ) और (क) इन दो पेड़ों का बीच जानना है तो (अगघ) त्रिभुज से

$$\text{सिद्ध हुआ कि } \frac{\text{अघ}}{\text{गघ}} = \frac{\text{ज्याअगघ}}{\text{ज्यागअघ}}$$

$$\therefore \text{अ} \cdot \text{घ} = \frac{\text{अ} \cdot \text{ज्याआ}}{\text{ज्या (आ} + \text{घा)}}$$

ऐसाही (कगघ) त्रिभुज से

$$\text{सिद्ध हुआ कि } \text{कघ} = \frac{\text{अ} \cdot \text{ज्याका}}{\text{ज्या (का} + \text{गा)}}$$

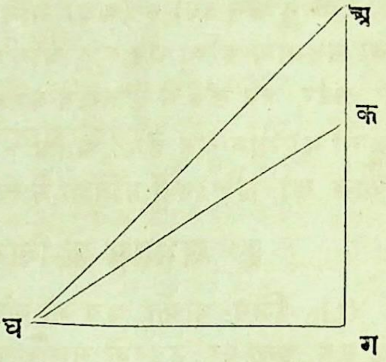
यों (अघ) और (कघ) ये दो भुज और उन के बीच का कोण ये तीन अवयव ज्ञात भये अब इन पर से (अक) भुज जानना (४८वें) प्रक्रम में लिखे हुए तीसरे प्रकार से सुलभ है ॥

$$\text{तब } \text{अक}^{२} = \text{अघ}^{२} + \text{कघ}^{२} - २\,\text{अघ} \cdot \text{कघ} \cdot \text{कोज्या अघक}$$

$$\therefore \text{अक} = \sqrt{\text{अघ}^{२} + \text{कघ}^{२} - २\,\text{अघ} \cdot \text{कघ} \cdot \text{कोज्या (गा} - \text{घा)}}$$

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

उदा० (८) समान भूमि पर एक (अकग) घर है उसके (अक) और (कग) प्रदेश क्रम से (अ) और (क) हाथ हैं। अब उस घर की दूरी जानने के लिये (घ) स्थान से (कघग) कोण नापने से (आ) अंश मिले तब कहो कि (घअ) दूरी कितनी है। यह प्रश्न है ॥



यहां य = घअ प्रदेश के हाथ हैं।

$$\text{तब स्पकघग} = \text{स्प (अघग—अघक)} = \frac{\text{स्पअघग — स्पअघक}}{१ + \text{स्पअघग . स्पअघक}}$$

$$\text{परन्तु स्पअघग} = \frac{\text{अ} + \text{क}}{\text{य}} \text{। और स्पअघक} = \frac{\text{अ}}{\text{य}}$$

$$\therefore \text{उत्थापन से स्पआ} = \frac{\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{य}} - \frac{\text{अ}}{\text{य}}}{१ + \frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{य}} \cdot \frac{\text{अ}}{\text{य}}} = \frac{\text{कय}}{\text{य}^{२} + \text{अ (अ+क)}}$$

इस समीकरण से सिद्ध हुआ कि

$$\text{य} = \frac{\text{क} \pm \sqrt{\text{क}^{२} — ४ \text{ अ (अ + क) स्प}^{२} \text{ आ}}}{२ \text{ स्पआ}}$$

यहां (स्पआ) का मान जैसा २ $\frac{\text{क}}{२\sqrt{\text{अ (अ+क)}}}$ इस से न्यून वा समान वा अधिक हो वैसा २ (य) का मान क्रम से दो प्रकार वा एक प्रकार का वा असंभाव्य होगा ॥

वह एक प्रकार का मान तो $\sqrt{\text{अ (अ + क)}}$ यह है इस प्रश्न का उत्तर क्षेत्रमिती की रीति से भी झट पट जान पड़ता है। सो ऐसा

(कग) रेखा पर एक ऐसा वृत्तखंड करना कि जिस में उस रेखा पर उस खंड के परिधी से लगा हुआ कोण (आ) अंश के समान हो और (अ) स्थान पर लंब करना तब उस लंब से वह वृत्तखंड कटे वा

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

लगे वा न लगे वैसा २ (अब) मान क्रम से दो प्रकार वा एक प्रकार का वा असंभाव्य होगा यह स्पष्ट जान पड़ता है ॥

और जब लंब से वृत्तखंड का स्पर्श हो तब एक प्रकार का (अक) दूरी का मान यह है $\sqrt{\text{अ (अ + क)}}$ यह क्षेत्रमिती के तीसरे अध्याय की छत्तीसवीं प्रतिज्ञा से स्पष्ट होता है ॥

॥ अभ्यास के लिये और उदाहरण ॥

(१) जिस आयत क्षेत्र की कोटि ५० (अ) हाथ है उस की कोटि के एक अन्त पर ठहरके सामने के कोटिओं के अन्तों के बीच का कोण वेधने से ३०० (आ) अंश लब्ध हुए तो उस आयत में भुज का मान क्या होगा। भुज = $\frac{\text{अ}}{\text{स्पआ}}$ = ५० $\sqrt{३}$ = ८६.६०२५४ उत्तर ॥

(२) पूर्व पश्चिम आयतरूप भीत की दृष्टिमूच से ऊंचाई १५ (अ) हाथ है और उस भीत की दहनी ओर ३५ (क) हाथ दूर पर ठरहके ध्रुव नक्षत्र को देखा तब वह भीत के ऊपर के अन्त में लगा हुआ देख पड़ा तब वहां ध्रुव नक्षत्र की ऊंचाई कितनी होगी ॥

ध्रुव की ऊंचाई = $\overset{*-}{\text{स्प}}\ \frac{\text{अ}}{\text{क}}$ = २३° । ११′ । ५५″ उत्तर ॥

(३) किसी एक वंशादि की ऊंचाई जानने के लिये कोई गणक २०० (अ) हाथ सरल भूमि नापके फिर उस भूमि के एक अग्र से दूसरे अग्र और वंशादि के बीच का कोण ५०° । १२′ (आ) अंश के समान वेध के फिर उस भूमि के दूसरे अग्र से पहिला अग्र और वंशादि के बीच का कोण ४०° । २५′ (का) अंश वेधा और वंशादि की ऊंचाई ५७° । ४०′ (गा) अंश के समान वेधा तो कहो उस वंशादि की ऊंचाई क्या होगी। यह प्रश्न है ॥

---

* जितने कोण वा चाप की स्पर्श रेखा $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ हो उस का द्योतक $\text{स्प}^{-१}$ यों $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ यह हो। $\text{ज्या}^{-१}\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ । $\text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ इत्यादि ज्या आदिओं के कोण वा चाप जताते हैं ॥

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

वंशादि की ऊंचाई = $\frac{\text{अ . ज्याआ . ज्यागा}}{\text{ज्या (आ + का)}}$ = १२८ . ८४ हाथ है ॥

(४) एक दुस्तर नदी के पार कोई घर है उस की इस पार से दूरी जानने के लिये इस पार १०० (अ) हाथ तिरछी भूमि नापके फिर उस भूमि के हर एक अग्र से दूसरा अग्र और घर इन के दोनों के बीच का कोण नापने से मिले क्रम से कोणों के मान ४०° । २५′ (आ) । ३७° । ४८′ (का) तो उस भूमि के हर एक अग्र से वह घर कितने २ दूर पर है ॥

पहिले अग्र से दूर = $\frac{\text{अ . ज्याका}}{\text{ज्या (आ + का)}}$ = ६२ . ६२०१ हाथ है ॥

दूसरे अग्र से दूर = $\frac{\text{अ . ज्याआ}}{\text{ज्या (आ + का)}}$ = ६६ . २२ ६८२ाथ है

(५) किसी दुस्तर नदी के पाट की चौड़ाई जानने के लिये इस पार ६० (अ) हाथ तिरछी भूमि नापके उस के हर एक अग्र से दूसरा अग्र और उस पार कोई पत्थर आदि हो उन के बीच के दो कोण नापने से क्रम से ४२° । १७′ (आ) और ५२° । ३५′ (का) कोणों के मान मिले तो उस नदी की चौड़ाई क्या होगी ॥

नदी की चौड़ाई = $\frac{\text{अ . ज्याआ . ज्याका}}{\text{ज्या (आ + का)}}$ = ३२ . १७७६८ हाथ है

(६) काशी में गंगा जी में कोई एक बड़ी नाव है उस के सामने के तीर पर ४० (अ) हाथ ऊंचा घर है किसी ने उस घर के सब से नीचे के खंड में खड़ा होकर समसूत्र से नाव के अधरांश नापा सो ४०° । १५′ (आ) और इसी प्रकार से उस घर के ऊपर के खंड में खड़ा होकर अधरांश नापा सो २५° । ३०′ (का) हुए तो उस घर का तल गंगा पाट के जलपृष्ठ के समसूत्र से कितनी ऊंचाई पर है और उसकी ऊंचाई के स्थान के मूल से वह नाव कितने दूर पर है ॥

ऊंचाई = $\frac{\text{अ . कोज्याआ . ज्याका}}{\text{ज्या (आ — का)}}$ = ५१ . ६२२५६ हाथ है ॥

दूर = $\frac{\text{अ . कोज्याआ . कोज्याका}}{\text{ज्या (आ — का)}}$ = १०८ . २९८९

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosh

(७) किसी पहाड़ के शिखर पर ५० (अ) हाथ ऊंचा देवालय है उसके अग्र और मूल को उस पहाड़ की समीप भूमि पर खड़े रहके वेध किया सो क्रम से ५१° । ४०′ (आ) और ५०° १५′ (का) उन्नतांश मिले तब पहाड़की ऊंचाई क्या होगी सो कहो ॥

$$\text{ऊंचाई} = \frac{\text{अ . कोज्याआ . ज्याका}}{\text{ज्या (आ—का)}} = \text{६६४ . ४१२४ हाथ है ॥}$$

(८) किसी एक बड़े तलाव के दक्षिण और उत्तर की ओर दो देवालय हैं, उन दोनों का वीच जानने के लिये उस तलाव की पूर्व की ओर ऐसा बांस गाड़ दिया कि जिस में वह दक्षिण देवालय से २० (अ) हाथ वीच पर हो और उत्तर देवालय से ८० (क) हाथ वीच पर हो। फिर दक्षिण देवालय से वांस और उत्तर देवालय के वीच का कोण नापा तो २१° । १७′ (का) मिले तब यह प्रश्न है कि उन दो देवालयों का बीच क्या होगा ॥

$$\text{बीच} = \text{अ . कोज्याका} \pm \sqrt{\text{क}^{२} - \text{अ}^{२}\text{ज्या}^{२}\text{क}}$$

$$= \text{९१९ . ९७२ वा १५२ . ७५ हाथ है ॥}$$

(९) किसी स्थान पर भूमि के दो प्रदेश समुद्र में आगे बढ़े हुए थे उन पर दो पेड़ थे उन का बीच जानने के लिये किसी स्थान से हर एक पेड़ तक वीच नापने से क्रम से १५० (अ) और २०० (क) हाथ हुए। फिर उसी स्थान से उन दो पेड़ों के बीच का कोण नाप लिया ५०° । २७′ (गा) मिले तो उन दो पेड़ों का बीच क्या होगा ॥

$$\text{बीच} = \sqrt{\text{अ}^{२} + \text{क}^{२} - \text{२अक . कोज्यागा}} = \text{१५५.८७ हाथ है ॥}$$

(१०) किसी पहाड़ के शिखर पर पत्थर का खंभा है उस की ऊंचाई जानने के लिये उस पहाड़ की समीप भूमि पर खड़े रहके खंभे की ऊंचाई वेधने से ३१° । २०′ (आ) मिले फिर खंभे की दिशाही में आगे समान भूमि पर १५० (अ) हाथ जाके खंभे के मूल और अग्र की ऊंचाई वेधने से क्रम से ४५° । ४२′ (का) और ३५° । ३३′ (गा) अंश मिले तो खंभे की और पहाड़ की ऊंचाई क्या होगी ॥

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

खंभे की ऊंचाई = $\frac{\text{ग्र . ज्याग्रा . ज्या (का—गा)}}{\text{कोज्यागा . ज्या (का—ग्रा)}}$ = ६८ . ०९१ हाथ हैं ॥

पहाड़ की ऊंचाई = $\frac{\text{ग्र.ज्याग्रा.कोज्याका.ज्यागा}}{\text{कोज्यागा . ज्या (का—ग्रा)}}$ = १५६.८१८४ हाथ है॥

(११) किसी क्रम से उतरती हुई भूमि का समान भूमि से झोंक ३९°।१५′ (ग्रा) अंश है और जिस का मूल दुस्तर नदी के तीर पर है और उस के पार तीर पर एक देवालय है उसकी ऊंचाई जानने के लिये उस देवालय के सामने की ओर ही उस क्रम से उतरती हुई भूमि के ऊपर की ओर नापने वाले ने ठहर करके देवालय के शिखर को वेधा तो ११° ३०′ (का) अंश मिले। फिर उसने देवालय के सामने की ओर ही उस क्रम से उतरती हुई भूमि २०० (ग्र) हाथ उतर के उस भूमि के मूल पर से फिर उस देवालय के शिखर को वेधा सो उन्नतांश २९°। २०′ (गा) मिले तो नदी की चौड़ाई और देवालय की ऊंचाई कितनी होगी ॥

नदी की चौड़ाई = $\frac{\text{ग्र. ज्या (ग्रा—का) . कोज्यागा}}{\text{ज्या (का + गा)}}$ = १२४ . १६

देवालय की ऊंचाई = $\frac{\text{ग्रा . (ग्रज्या—का) . ज्यागा}}{\text{ज्या (ग्रा + गा)}}$ = ६९ . ७७

(१२) किसी भूमि पर बत्तिस (ग्र) हाथ ऊंचा बांस है जिस के मूल की चारों ओर सब दिशाओं में झुकाव है और उस का समान भूमि पर बीस (ग्रा) अंश झुकाव है फिर वह बांस वायु के वेग से टूटा तब उस का अग्र उस उतरती हुई भूमि में सोलह (क) हाथ पर लगा तो वह बांस मूल से कितने हाथ पर टूटा यह प्रश्न है ॥

$\frac{\text{ग्र}^2 - \text{क}^2}{2(\text{ग्र} + \text{क.ज्याग्रा})}$ = १० . २४७६ हाथ पर लगा यह उत्तर है ॥

(१३) एक पहाड़ के शिखर पर १२० (ग्रा) हाथ का खंभा है उस पहाड़ पर ठहर के किसी पुरुष ने खंभे का मूल और अग्र इन के बीच का कोण नाप लिया तो लब्ध हुए अंश ९°।४०′ (ग्रा) फिर खंभे की ओर ही २०० (क) हाथ समान भूमि पर जाके फिर खंभे का मूल और

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$$\text{पहाड़ की ऊंचाई} = \frac{१}{२}\sqrt{\left(\frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}}\right)^{२} - \text{क}^{२}} - \text{अ}) = २८३.०४३४६५५$$

हाथ है ॥

(१४) सौ (अ) हाथ ऊंचा एक राजमंदिर है उस पर से किसी समान भूमि पर दुर्गम स्थान में दो पेड़ देख पड़ते थे उन का बीच जानने के लिये किसी गणक ने उस मंदिर पर से उन के मूल के अधरांश २° । ५६′ (आ) और ३° । ११′ (का) जानके उन्हीं दोनों के बीच का कोण नापा सो ९° । ४१′ (गा) अंश हुआ तो कहो उन दो पेड़ों का बीच क्या होगा यह प्रश्न है ॥

$$\text{बीच} = \text{अ}\sqrt{\text{कोछे}^{२}\text{आ} + \text{कोछे}^{२}\text{का} - २\,\text{कोछेआ}\cdot\text{कोछेका}\cdot\text{कोज्यागा}}$$
$$= ३५४.३४९$$

(१५) एक भींत पूर्व पश्चिम लम्बी और दूसरी दक्षिणोत्तर लंबी दोनों बारह (अ) हाथ ऊंची थीं । वहां जब पहिली भींत के उत्तर भाग में छाया चार (क) हाथ चौड़ी हो और दूसरी भींत के पश्चिम भाग में छाया तीन (ग) हाथ चौड़ी हो तो सूर्य के उन्नतांश और दिगंश कितने होंगे यह प्रश्न है ॥

$$\text{उन्नतांश} = \text{स}^{-१}\frac{\text{अ}}{\sqrt{\text{क}^{२} + \text{ग}^{२}}} = ६७^{\circ} । २२' । ४८''$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{पूर्व कपाल में}\\ \text{उत्तर दिगंश}\end{array}\right\} = \text{ज्या}^{-१}\frac{\text{क}}{\sqrt{\text{क}^{२} + \text{ग}^{२}}} = ५३^{\circ} । ७' । ४८''$$

(१६) एक पूर्व पश्चिम लम्बी बारह (अ) हाथ ऊंची भींत है उस के पश्चिम अन्त में पूर्व चिन्ह से ६७° । ३०′ (आ) अंश पर उत्तर भाग में गई हुई दूसरी भींत है वह भी बारह हाथ ऊंची है जब उन दोनों की छाया बाहर की ओर इस प्रकार से पड़ती हैं कि जिस में पहिली की तीन (क) हाथ चौड़ी और दूसरी की चार (ग) हाथ चौड़ी हो तो सूर्य के उन्नतांश और दिगंश क्या होंगे यह प्रश्न है ॥

CC-0. In Public Domain Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

$$\text{उन्नतांश} = \text{स्प}^{-१} \frac{\text{अ. ज्याआ}}{\sqrt{\text{क}^{२} + \text{ग}^{२} + २\text{कग. कोज्याआ}}} = ६२^{\circ} । ११' । ३९''$$

$$\left.\begin{matrix}\text{पूर्व कपा-}\\\text{ल में उत्त}\\\text{र दिगंश}\end{matrix}\right\} = \text{ज्या}^{-१} \frac{\text{क. ज्याआ}}{\sqrt{\text{क}^{२} + \text{ग}^{२} + २\text{कग. कोज्या}}} = २८^{\circ} । १०' । ५१''$$

(१७) कोई नापने हारा कोणसाधक यंत्र के बिनाही केवल सीधी लकड़ी ही से दुर्गम नदी का पाट जानने के लिये इस पार (कग) समान भूमि १७५ एक सौ पचहत्तर हाथ नापके उस पार (क) स्थान से (अ) चिन्ह जिस दिशा में हो उस की बिरुद्ध दिशा में (कघ) भूमि साठ हाथ नापके (गघ) भूमि को नाप लिया तो २१४ हाथ लब्ध ऊए फिर (ग) स्थान से जिस दिशा में (अ) चिन्ह हो उस को विरुद्ध दिशा में (गच) भूमि ९० हाथ नापके (कच) भूमि नाप लिई तो २१५ हाथ लब्ध ऊए तो नदी के पाट का मान कितना होगा ॥

पाट का मान = २००.८६२८ हाथ है ॥

(१८) (अ) हाथ समान भूमि नापके उस के दोनों अन्त पर ठहर-के एक बांस के अग्र को वेधने से समान ही (आ) अंश लब्ध ऊए और उस भूमि के बीच में ठहरके अग्र को वेधने से (का) अंश लब्ध ऊए तो उस वांस की ऊंचाई कितनी होगी और उस भूमि का मध्य और बांस का बीच कितना होगा यह प्रश्न है ॥

$$\text{ऊंचाई} = \frac{\text{अ. ज्याआ. ज्याका}}{२\sqrt{\text{ज्या (आ + का) ज्या (आ — का)}}}$$

$$\text{दूरी} = \frac{\text{अ. ज्याआ. कोज्याका}}{२\sqrt{\text{ज्या (का + आ) ज्या (का — आ)}}}$$

(१९) (अ), (क) औ (ग) इन तीन स्थानों में (अ) स्थान से (क) स्थान पूर्व में है और (ग) स्थान पूर्व चिन्ह से दक्षिण कीओर (आ) अंश दूर पर है और (क), (ग) इन दो स्थानों का बीच (अ) हाथ है किन्तु वह स्थान दुर्गम है इस लिये कोई मनुष्य (क) स्थान से (अ) स्थान

CC-0. In Public Domain. Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha

CC-0. In Public Domain.Digitized By Siddhanta eGangotri Gyaan Kosha